Petriho sítě

PES 2007/2008

Prof. RNDr. Milan Češka, CSc.

ceska@fit.vutbr.cz

Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

vojnar@fit.vutbr.cz

Sazba: Ing. Petr Novosad, Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

(verze 27.2.2008)

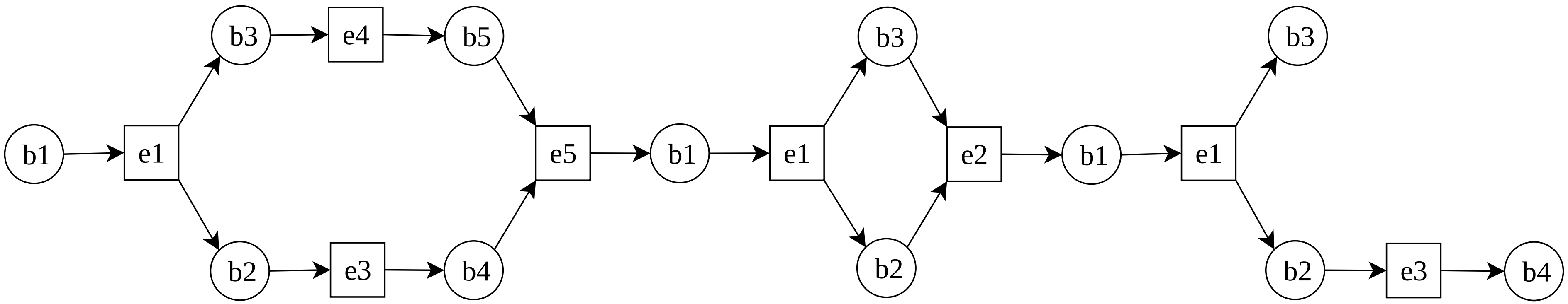
FIT, VUT v Brně, Božetěchova 2, CZ-612 66 Brno

Procesy C/E systémů

Problém reprezentace procesů:

1. Prostřednictvím případového grafu jako cesta v grafu (není zcela adekvátní)
2. Výskytová síť (Occurrence net)
   jednoznačný, explicitní záznam výskytů událostí a změn podmínek systému

❖ **Příklad 1**: Výskytová síť



Reprezentace procesu při provádění sítě z příkladu 3 (kapitola C/E Systémy) odpovídající posloupnosti:

$\{b_1\}[e_1\rangle\{b_2,b_3\}[e_4\rangle\{b_2,b_5\}[e_3\rangle\{b_4,b_5\}[e_5\rangle\{b_1\}[e_1\rangle\{b_2,b_3\}[e_2\rangle\{b_1\}[e_1\rangle\{b_2,b_3\}[e_3\rangle\{b_4,b_3\}$

Atributy této reprezentace:

- ohodnocená síť
- částečně uspořádaná síť

1. Částečně uspořádané množiny

❖ **Definice 1.1**: Nechť M je množina. Relace $\rho \subseteq M \times M$ se nazývá *částečné uspořádání* , jestliže $\forall a, b, c \in M$

(1) $\neg(a\rho a)$	[ρ je ireflexivní]
(2) $a\rho b \quad \wedge \quad b\rho c \quad \Rightarrow \quad a\rho c$	[ρ je tranzitivní]

Částečné uspořádání ρ budeme zapisovat symbolem $<$ (bez ohledu na nosič).
Dále $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a < b \quad \vee \quad a = b$

Ukážeme nyní některé vlastnosti relace, která popisuje vztah "kauzální závislosti a nezávislosti".

❖ **Definice 1.2**: Nechť A je množina. Relace $\rho \subseteq A \times A$ se nazývá *relací podobnosti* (similarity relation), jestliže

(1) $\forall a \in A\colon\ a\rho a$	[ρ je reflexivní]
(2) $\forall a, b \in A\colon\ a\rho b \ \Rightarrow\ b\rho a$	[ρ je symetrická]

Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá *oblastí relace podobnosti* ρ, jestliže

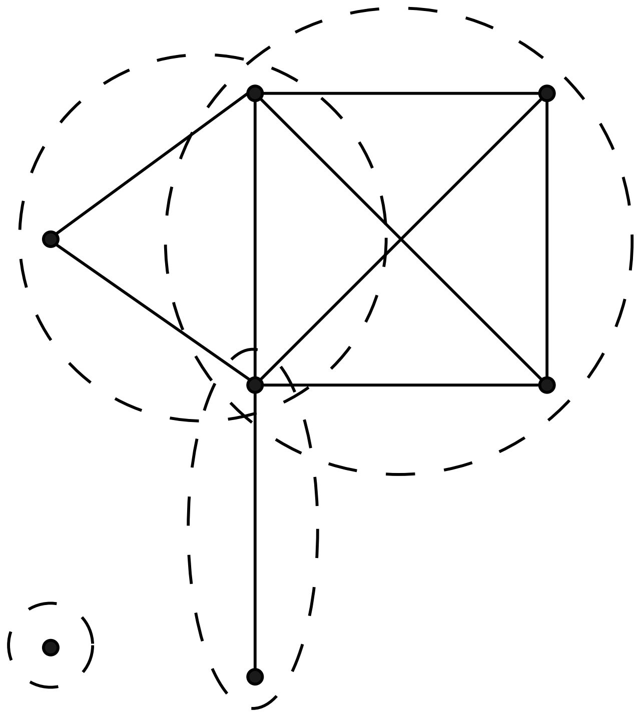
(1) $\forall a, b \in B\colon\ a\rho b$	[ρ je úplnou relací na B]
(2) $\forall a \in A\colon\ a \notin B \ \Rightarrow\ \exists b \in B\colon\ \neg(a\rho b)$	[B je maximální]

❖ **Tvrzení 1.1**: Nechť ρ je relace podobnosti na A.

1. Každý prvek $a \in A$ patří alespoň do jedné oblasti relace ρ
2. Žádná oblast není vlastní podmnožinou jiné oblasti
3. Je-li ρ zároveň ekvivalence, pak její oblasti jsou shodné s třídami rozkladu generovaného touto ekvivalencí

❖ **Grafická reprezentace relace podobnosti**: Neorientovaným grafem, kde A je množina vrcholů a $K = \{(a,b) |\ a \neq b \ \ \wedge \ \ a\rho b\}$ je množina hran.

❖ **Příklad 2**: Relace podobnosti a její oblasti



❖ **Definice 1.3**: Nechť A je částečně uspořádaná množina.

1. Nechť *li* $\subseteq A \times A$ je binární relace

$$\boxed{a \ \underline{li} \ b \quad \Leftrightarrow \quad a < b \ \vee \ b < a \ \vee \ a = b}$$

2. Nechť *co* $\subseteq A \times A$ je binární relace

$$\boxed{a \ \underline{co} \ b \quad \Leftrightarrow \quad \neg(a \ \underline{li} \ b) \ \vee \ a = b}$$

tzn. $a \ \underline{co} \ b \quad \Leftrightarrow \quad \neg(a < b) \ \wedge \ \neg(b < a) \ \vee \ a = b$

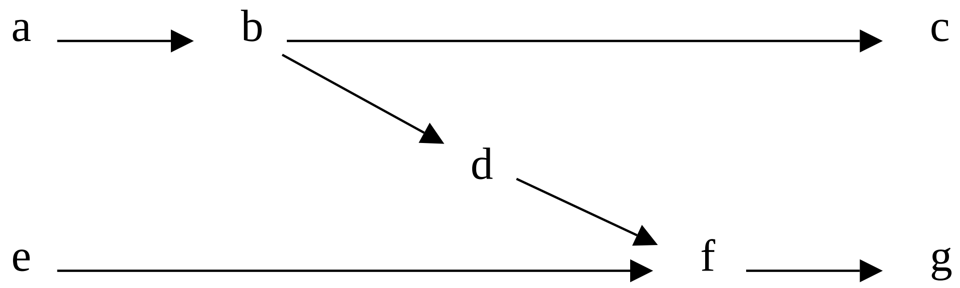
❖ **Tvrzení 1.2**: Nechť A je částečně uspořádaná množina a nechť $a, b \in A$.

1. $a \ \underline{li} \ b \ \vee \ a \ \underline{co} \ b$
2. $a \ \underline{li} \ b \ \wedge \ a \ \underline{co} \ b \quad \Leftrightarrow \quad a = b$

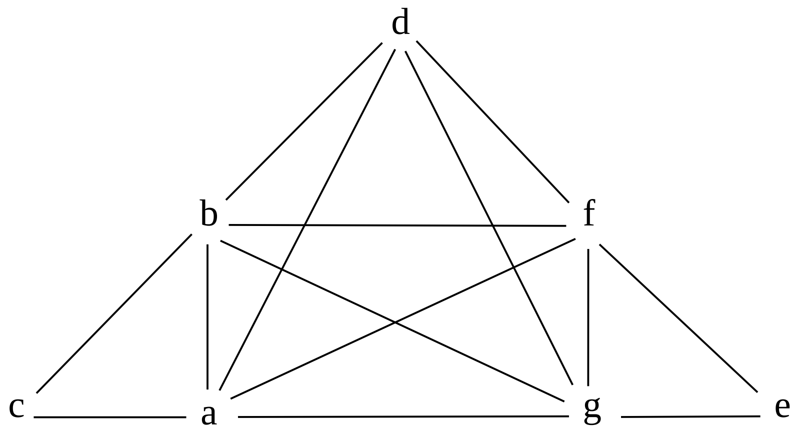
❖ **Theorem 1.1**: Pro každou částečně uspořádanou množinu jsou binární relace $\underline{li}$ a $\underline{co}$ relacemi podobnosti.

Důkaz.

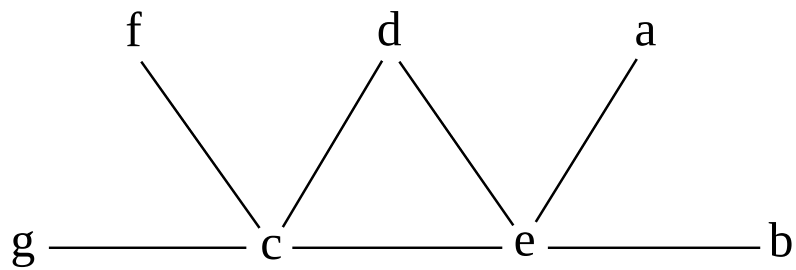
❖ **Příklad 3**:
Uvažujme poset:



Odpovídající grafická reprezentace relací $\underline{li}$ a $\underline{co}$:



$\underline{li}$



$\underline{co}$

❖ **Definice 1.4**: Nechť A je poset a $B \subseteq A$.

1. B se nazývá *řetězcem* (line), je-li oblastí <u>li</u>
2. B se nazývá *řezem* (cut), je-li oblastí $\underline{co}$

❖ **Příklad 4**: Částečné uspořádání z příkladu 3 má
3 řetězce: $\{a, b, c\}$, $\{e, f, g\}$ a $\{a, b, d, f, g\}$
5 řezů: $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, d, c\}$, $\{f, c\}$ a $\{g, c\}$

❖ **Tvrzení 1.3**: Nechť A je poset a $B \subseteq A$.

1. B je řetězcem, právě když
   (a) $\forall a, b \in B\colon\ a < b \ \vee \ b < a \ \vee \ a = b$
   (b) $\forall a \in A \backslash B \ \exists b \in B\colon\ \neg(a < b \ \vee \ b < a)$
2. B je řezem, právě když
   (a) $\forall a, b \in B\colon\ \neg(a < b \ \vee \ b < a)$
   (b) $\forall a \in A \backslash B \ \exists b \in B\colon\ (a < b \ \vee \ b < a)$

Definice 1.5: Nechť A je poset a $B, C \subseteq A$.

1. Množina A se nazývá *omezená* (ohraničená), jestliže existuje $n \in N$ takové, že pro každý řetězec množiny A platí $|L| \leq n$
2. B *předchází* C (píšeme $B \leq C$), jestliže $\forall b \in B \;\; \forall c \in C\colon \;\; b < c \quad \vee \quad b \;\underline{co}\; c$ ($B < C$ značí $B \leq C$ a $B \neq C$)
3. Nechť $B^{-} = \{a \in A | \; \{a\} \leq B\}$ a $B^{+} = \{a \in A | \; B \leq \{a\}\}$
4. Nechť ${}^{\circ}B = \{b \in B | \, \forall b' \in B\colon \;\; b \;\underline{co}\; b' \quad \vee \quad b < b'\}$ a
   $B^{\circ} = \{b \in B | \, \forall b' \in B\colon \;\; b \;\underline{co}\; b' \quad \vee \quad b' < b\}$.
   Zřejmě ${}^{\circ}A$ obsahují “minimální prvky” množiny A a A° pak “maximální prvky” množiny A.

❖ **Theorem 1.2**: Je-li A omezená částečně uspořádaná množina, pak $^\circ A$ a A° jsou řezy.

Důkaz: Nechť a, b jsou libovolné prvky $^\circ A$. Pak $a \ \underline{co} \ b$, protože $\neg(a < b \ \vee \ b < a)$. Nechť $c \in A \setminus {}^\circ A$ a nechť L je řetězec a $c \in L$. Protože L je konečná množina, existuje $d \in L \cap {}^\circ A$, a proto $d < c$. Podle Tvrzení 1.3 (2) je $^\circ A$ řezem. Pro A° analogicky. $\square$

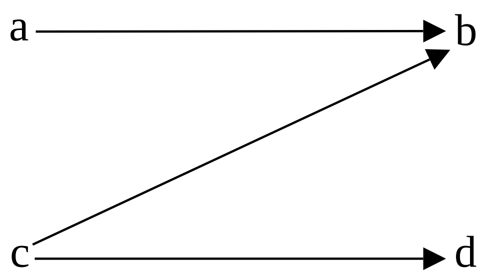
❖ **Tvrzení 1.4**: Nechť A je poset, L řetězec a D řez množiny A. Pak

$$\boxed{|L \cap D| \leq 1}$$

Důkaz: Nechť $a, b \in L \cap D$. Pak $a \ \underline{li} \ b$, protože $a, b \in L$. Avšak $a \ \underline{co} \ b$, protože $a, b \in D$. Podle Tvrzení 1.2 (2) je $a = b$. $\square$

❖ **Definice 1.6**: Poset A se nazývá *K-hustým* (K-dense), jestliže každý řetězec má neprázdný průnik s každým řezem.

❖ **Příklad 4**: Poset, který není K-hustý



$$\{c, b\} \cap \{a, d\} = \emptyset$$

2. Výskytové sítě (Occurrence Nets)

❖ **Definice 2.1**: Síť $K = (S_K, T_K, F_K)$ se nazývá *výskytová síť* (occurrence net), jestliže

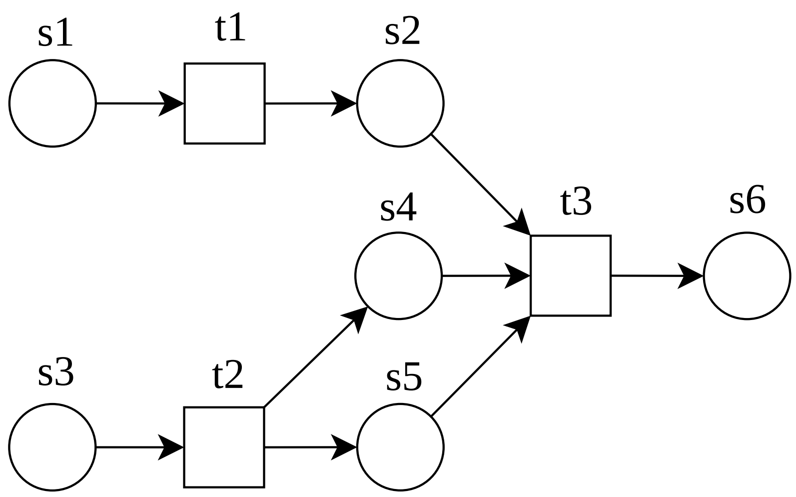
1. $\forall a, b \in K: \; aF_K^+b \;\; \Rightarrow \;\; \neg(bF_K^+a)$, tj. K nemá cykly
2. $\forall s \in S_K: \; |{}^\bullet s| \leq 1 \;\; \wedge \;\; |s^\bullet| \leq 1$, tj. místa sítě nejsou větvena

❖ **Tvrzení 2.1**: Nechť K je výskytová síť. Relace $<$ definována: $a < b \;\; \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \;\; aF_K^+b$ pro všechna $a, b \in K$ je částečné uspořádání na K (tj. $S_K \cup T_K$)

Poznámka: To znamená, že pro K jsou definovány dříve zavedené pojmy řetězce, řezy, omezenost a K-hustota.

❖ **Definice 2.2**: *S-řezem* (slice) nazýváme řez, který obsahuje pouze místa. Označme *sl*(K) množinu všech S-řezů sítě K.

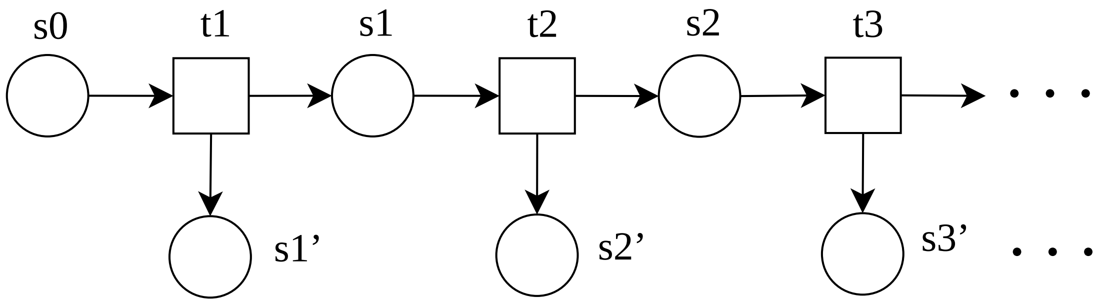
❖ **Příklad 5**:



Tato síť má 3 řetězce, 11 řezů a z toho 5 S-řezů.
Příklad řetězce: $\{s_3, t_2, s_4, t_3, s_6\}$
Příklad řezu: $\{t_1, s_4, s_5\}$
Příklad S-řezu: $\{s_1, s_3\}$

❖ **Theorem 2.1**: Každá omezená neprázdná výskytová síť je K-hustá.

❖ **Příklad 6**: Síť, která není K-hustá



$\{s_0, t_1, s_1, \ldots\} \cap \{s'_1, s'_2, \ldots\} = \emptyset$

Pokud by tato síť byla konečná: $|\{s_0, t_1, s_1, \ldots, t_n, s'_n\} \cap \{s'_1, \ldots, s'_n\}| = 1$

3. Procesy

Proces definujeme jako zobrazení z omezené výskytové sítě do bezkontaktního C/E systému, které splňuje 2 požadavky:

1. Každý S-řez sítě je injektivně zobrazen na nějaký případ C/E systému
2. Zobrazení přechodů výskytové sítě na události C/E systému respektuje okolí události

❖ **Definice 3.1**: Nechť K je omezená výskytová síť a nechť Σ je bezkontaktní C/E systém. Zobrazení $p\colon\ K \to \Sigma$ se nazývá proces systému Σ, jestliže pro každý S-řez D sítě K a každý přechod $t \in T_K$ platí:

1. $p|D$ je injektivní a $p(D) \in C_\Sigma$
2. $p({}^\bullet t) = {}^\bullet p(t) \ \ \wedge\ \ p(t^\bullet) = p(t)^\bullet$

Grafická reprezentace procesů $p : K \to \Sigma$:

Každý prvek x sítě K je označen (labeled) svým obrazem $p(x)$.

Síť z příkladu 1 je procesem C/E systému z příkladu 3 kapitoly C/E systémy.

❖ **Theorem 3.1**: Pro každý proces $p : K \to \Sigma$ platí:

1. $p(S_K) \subseteq B_\Sigma \;\; \wedge \;\; p(T_K) \subseteq E_\Sigma$, tj. p zachovává druhy
2. $\forall x, y \in K\colon\; xF_K y \;\; \Rightarrow \;\; p(x)F_\Sigma\, p(y)$, tj. p zachovává relaci toku
3. $\forall x, y \in K\colon\; p(x) = p(y) \;\; \Rightarrow \;\; x\, \underline{li}\, y$, tj. podmínky a události nejsou vzájemně paralelní
4. $\forall t \in T_K\colon\; {}^\bullet t \neq \emptyset \;\; \wedge \;\; t^\bullet \neq \emptyset$, tj. události mají antecendenty a konsekventy
5. pro každý řez D sítě $K\colon\; p|D$ je injektivní

❖ **Theorem 3.2**: Nechť $p : K \rightarrow \Sigma$ je proces, nechť pro $T \subseteq T_K$ platí $\forall t_1, t_2 \in T\colon\ t_1 \ \underline{co}\ t_2$. Pak $\exists c_1, c_2 \in C_\Sigma\colon\ c_1[p(T)\rangle c_2$.

Důkaz: Zřejmě $\forall s_1, s_2 \in {}^\bullet T\colon\ s_1 \ \underline{co}\ s_2$. Pak tedy existuje $D \in \underline{sl}(K)$, pro který ${}^\bullet T \subseteq D$. Podle definice 3.1 $p(D) \in C_\Sigma$ a ${}^\bullet p(T) = p({}^\bullet T) \subseteq p(D)$. Dále $\forall s \in T^\bullet\ \exists s_1 \in D$ takové, že $s_1 < s$. Proto $T^\bullet \cap D = \emptyset$ a také $p(D) \cap p(T^\bullet) = p(D) \cap p(T)^\bullet = \emptyset$. Tudíž $p(T)$ je $p(D)$-proveditelný krok. $\square$

Poznámka: Izomorfizmus výskytových sítí - nepojmenovávají se prvky sítě

❖ **Věta 3.1**: Každý bezkontaktní C/E systém je plně charakterizován množinou svých procesů. Proces $p\colon\ K \to \Sigma$ je skutečně reprezentován množinou dvojic $\{(x, p(x))|\ x \in K\}$.

❖ **Theorem 3.3**: Nechť Σ_1, Σ_2 jsou dva bezkontaktní C/E systémy a nechť P_i jsou množiny procesů systému Σ_i $(i = 1, 2)$. Pak $P_1 = P_2 \ \Leftrightarrow\ \Sigma_1 = \Sigma_2$.

Důkaz: Nechť $\Sigma_i = (B_i, E_i, F_i, C_i)$, $i = 1, 2$ a nechť $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Pak existuje $b \in B_1 \cup B_2$ nebo $e \in E_1 \cup E_2$ nebo $c \in C_1 \cup C_2$ takový, že $b \in B_1 \setminus B_2$ nebo $e \in E_1 \setminus E_2$ nebo $(b, e) \in F_1 \setminus F_2$ nebo $(e, b) \in F_1 \setminus F_2$ nebo $c \in C_1 \setminus C_2$. Pak ale existuje krok $c_1[e'\rangle c_2$ v Σ_1, který není možný v Σ_2 (vyber $b \in c_1 \cup c_2$ nebo $e' = e$ nebo $c = c_1$ nebo $c = c_2$). Pro $K = (S, \{t\}, F)$ nechť $p\colon\ K \to \Sigma_1$ je proces, pro který $p({}^\circ K) = c_1$ a $p(K^\circ) = c_2$ a $p(t) = e'$. Pak $p \in P_1 \setminus P_2$. $\square$

4. Kompozice procesů

Za předpokladu, že proces p_1 končí ve stejném případu (stavu), ve kterém proces p_2 začíná, definujeme kompozici

$$\boxed{p_1 \circ p_2}$$

❖ **Lemma 4.1**: Je-li $p\colon\ K \rightarrow \Sigma$ proces, pak $^\circ K$ a K° jsou S-řezy množiny K.

Důkaz: Podle theoremu 1.2 jsou $^\circ K$ a K° řezy množiny K. Protože Σ je bezkontaktní, pak pro každé $e \in E_\Sigma$ je $^\bullet e \neq \emptyset$ a $e^\bullet \neq \emptyset$. Z definice 3.1 (2) plyne $^\circ K \ \cup \ K^\circ \subseteq S_K$. $\square$

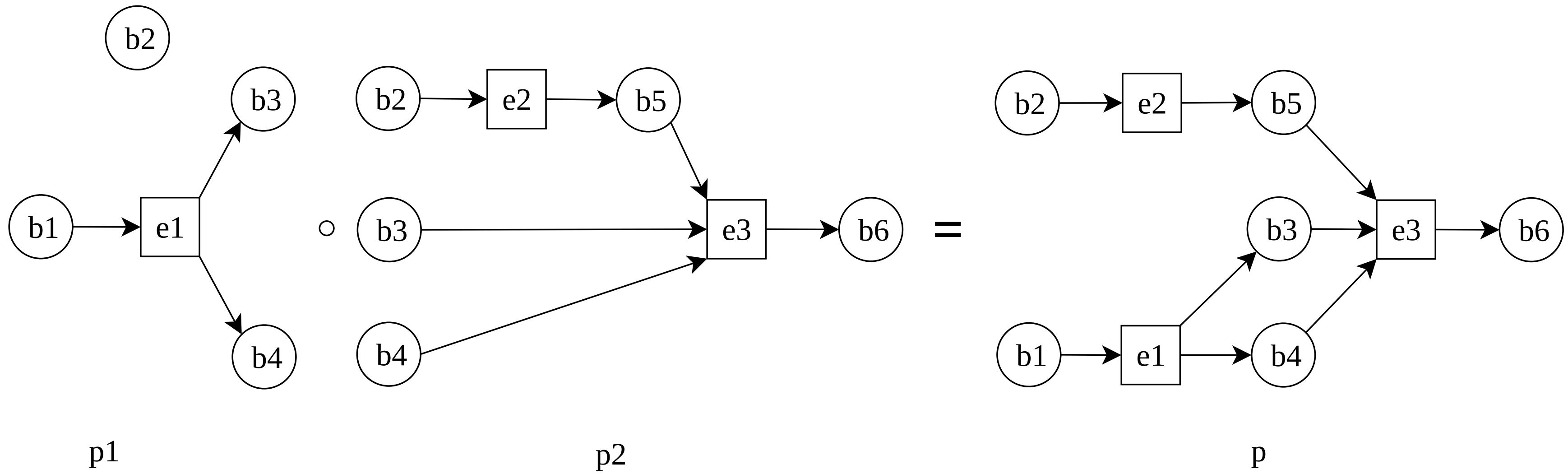
❖ **Lemma 4.2**: Nechť $p_i\colon\ K_i \to \Sigma$, $i = 1, 2$, jsou dva procesy, pro které $p_1(K_1^\circ) = p_2({}^\circ K_2)$. Pak existuje právě jedna (až na izomorfizmus) výskytová síť K a S-řez D této sítě a proces $p\colon\ K \to \Sigma$ takový, že

$$\boxed{p|D^- = p_1 \ \text{ a } \ p|D^+ = p_2}$$

Důkaz: Nechť $K_i = (S_i, T_i, F_i)$, $i = 1, 2$ a nechť $(S_1 \cup T_1) \cap (S_2 \cup T_2) = K_1^\circ = {}^\circ K_2$. Pak síť $K = (S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2, F_1 \cup F_2)$, $D = K_1^\circ = {}^\circ K_2$ a proces p definovaný předpisem $p(x) = p_i(x) \ \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \ x \in K_i$, $i = 1, 2$ splňuje tvrzení lemmy. □

❖ **Definice 4.1**: Nechť p_1, p_2, p jsou procesy splňující Lemma 4.2. Proces p se nazývá *kompozicí* procesů p_1 a p_2. Kompozici procesů zapisujeme $p = p_1 \circ p_2$

❖ **Příklad 7**: Kompozice procesů



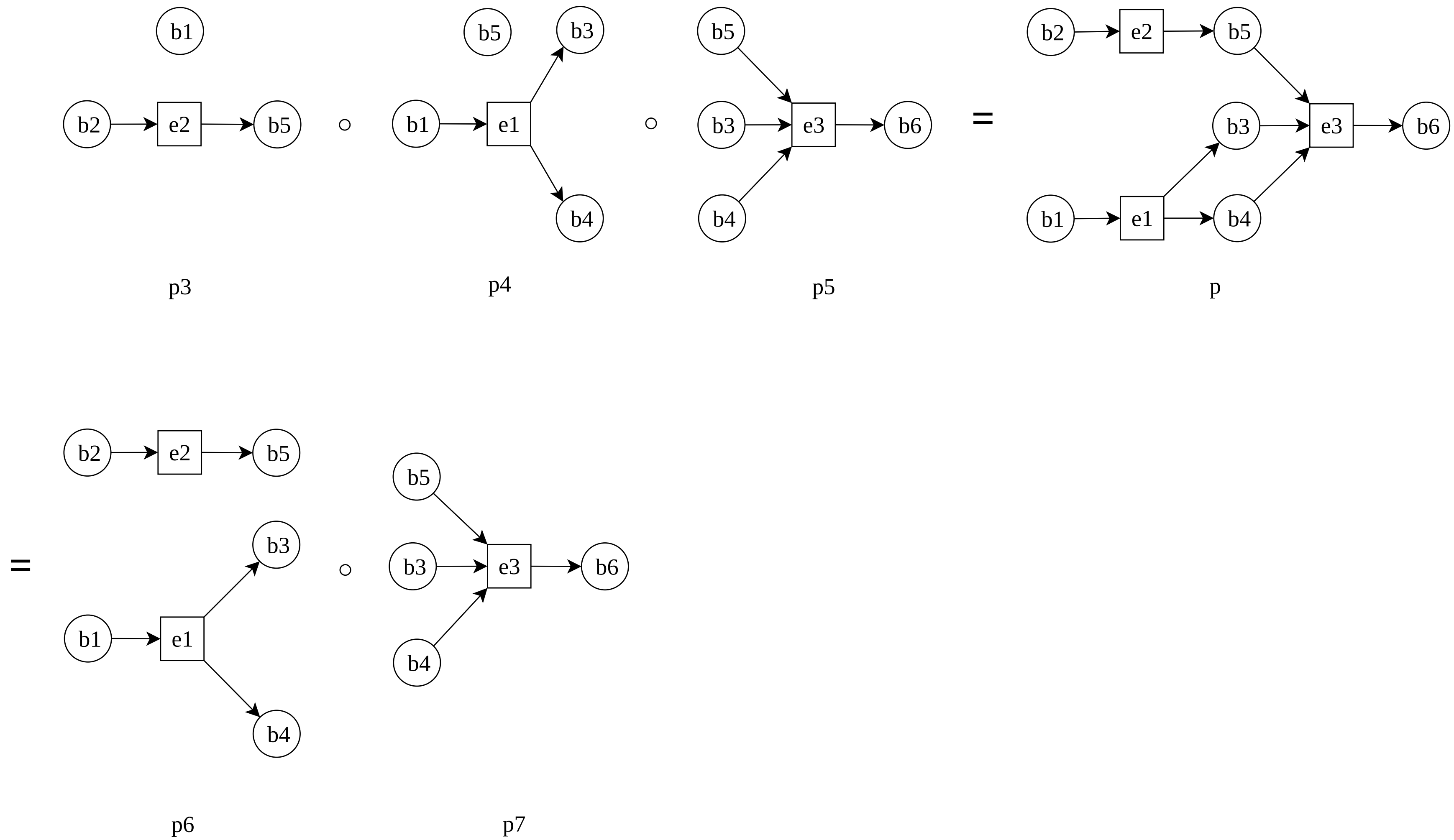
❖ **Tvrzení 4.1**: Nechť $p\colon\ K \to \Sigma$ je proces a nechť D je S-řez množiny K. Nechť $p^- = p|D^-$ a $p^+ = p|D^+$. Pak p^- a p^+ jsou procesy a $p = p^- \circ p^+$.

❖ **Tvrzení 4.2**: Nechť p_1, p_2, p_3 jsou procesy, pro které jsou definovány $p_1 \circ p_2$ a $p_2 \circ p_3$. Pak $p_1 \circ (p_2 \circ p_3) = (p_1 \circ p_2) \circ p_3$.

❖ **Definice 4.2**: Proces $p\colon\ K \to \Sigma$ je *elementární* , jestliže $S_K = {}^\circ K \ \cup \ K^\circ$

Poznámka: Proces se nazývá elementární, jestliže popisuje jednoduchý krok. Procesy jsou rozložitelné na konečně mnoho elementárních procesů.

❖ **Příklad 8**: Kompozice procesu p užitím elementárních procesů p_3, p_4, p_5 nebo p_6, p_7



- **Tvrzení 4.3**:
  1. $p\colon\ K \to \Sigma$ je elementární proces $\Leftrightarrow$ $p({}^\circ K)\ [p(T_K)\rangle\ p(K^\circ)$ je krok
  2. Jestliže $p\colon\ K \to \Sigma$ je elementární, pak $\forall t_1, t_2 \in T_K:\ t_1\ \underline{co}\ t_2$

- **Definice 4.3**: Proces $p\colon\ K \to \Sigma$ se nazývá *prázdný*, jestliže $T_K = \emptyset$.

- **Tvrzení 4.4**:
  1. Každý prázdný proces je elementární
  2. Je-li p' prázdný proces a je-li definováno $p \circ p'$ (resp. $p' \circ p$),
     pak $p = p \circ p'$ (resp. $p = p' \circ p$)

❖ **Tvrzení 4.5**: Je-li $p\colon\ K \to \Sigma$ proces, pak existuje konečně mnoho elementárních procesů $p_1, p_2, \ldots, p_n$ takových, že

$$\boxed{p = p_1 \circ p_2 \circ \ldots \circ p_n}$$

Důkaz: Existuje celé číslo m ohraničující počet přechodů každého řetězce množiny K. Je-li $m = 0$, pak p je prázdný. Jestliže nejdelší řetězec má $m \neq 0$ přechodů, pak p je rozložitelný na p' a p'' tak, že $p = p' \circ p''$, p' obsahuje $(m-1)$ přechodů a p'' je elementární neprázdný proces. Dále indukcí. $\square$

5. Procesy a případové grafy

Budeme hledat vztah mezi procesy a cestami v případovém grafu.

❖ **Lemma 5.1**: Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém. Proces $p\colon\ K \to \Sigma$ je elementární proces, právě když existuje hrana $v = (c_1, G, c_2)$ grafu Φ_Σ taková, že $p({}^\circ K) = c_1$, $p(K^\circ) = c_2$ a $p(T_K) = G$.

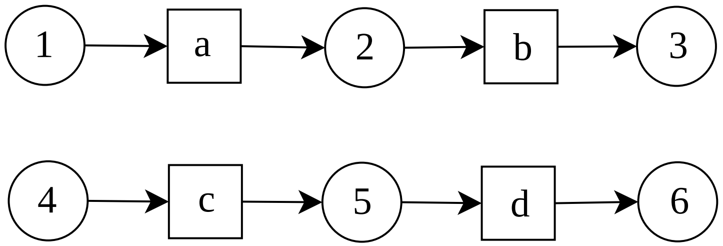
Důkaz: Jestliže $p\colon\ K \to \Sigma$ je elementární proces, pak $p({}^\circ K)\ [p(T_K)\rangle\ p(K^\circ)$ je krokem Σ a $(p({}^\circ K), p(T_K), p(K^\circ))$ je hranou grafu Φ_Σ. Naopak, je-li (c_1, G, c_2) hrana Φ_Σ, pak $c_1[G\rangle c_2$. Nechť $K = (c_1 \cup c_2, G, F_\Sigma \cap (c_1 \cup c_2 \cup G)^2)$. Pak $id\colon\ K \to \Sigma$ je elementární proces. $\square$

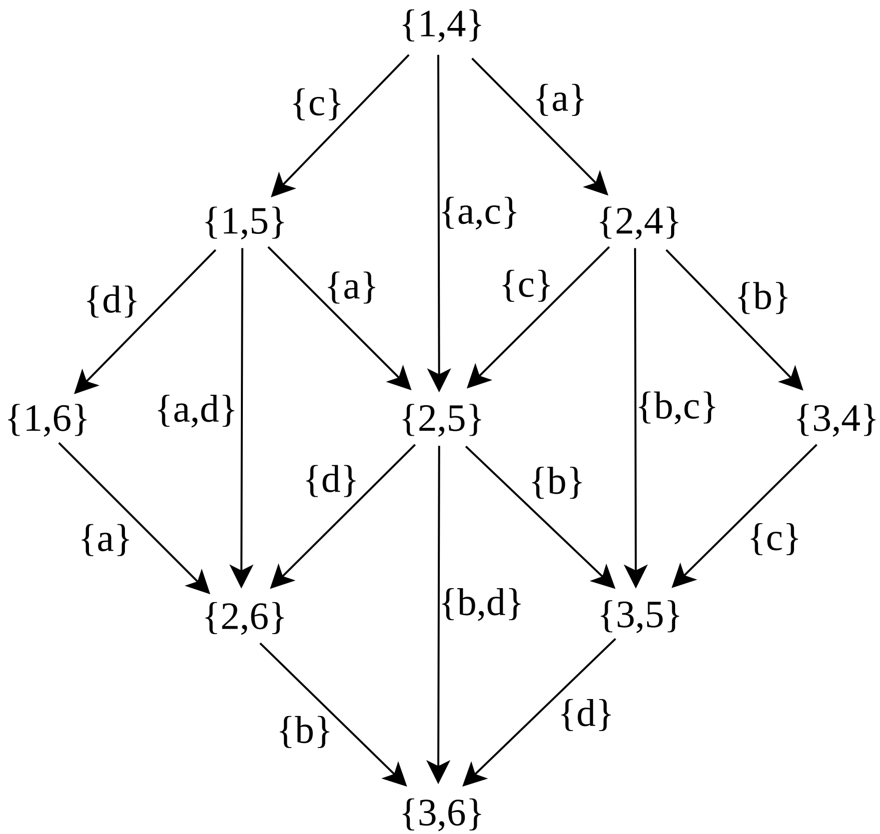
❖ **Definice 5.1**: Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém.

1. Je-li v hrana grafu Φ_Σ, pak $\tilde{v}$ označuje proces odpovídající hraně v.
   $\tilde{v}$ se nazývá *procesem hrany* v; v je *hranou procesu* $\tilde{v}$.
2. Nechť $v_1, v_2, \ldots, v_n$ jsou hrany a $w = v_1 v_2 \ldots v_n$ je cesta v Φ_Σ. Pak
   $\tilde{w} = \tilde{v_1} \circ \tilde{v_2} \circ \ldots \circ \tilde{v_n}$ se nazývá *procesem cesty* w; w je *cestou procesu* $\tilde{w}$.
3. Pro $v = (c_1, G, c_2)$ a $e \in G$ nechť $t(v, e) = \tilde{v}^{-1}(e)$ a $\tau(v) = \{t(v, e) | \ e \in G\}$
   $t(v, e)$ a $\tau(v)$ označuje jednoduchý přechod, resp. množinu přechodů odpovídající výskytové sítě.

❖ **Příklad 9**: Proces p a případový graf

p =





Každá z 13 cest v případovém grafu z případu $\{1,4\}$ do případu $\{3,6\}$ odpovídá procesu p.

❖ **Definice 5.2**: Nechť Σ je C/E systém, $c_1, c_2, c_3 \in C_\Sigma$ a $G_1, G_2 \subseteq E_\Sigma$.

1. Jestliže $u_1 = c_1 G_1 c_2$, $u_2 = c_2 G_2 c_3$ a $v = c_1(G_1 \cup G_2)c_3$ jsou hrany případového grafu Φ_Σ, pak cesta $u_1 u_2$ se nazývá *dekompozicí* cesty v a v se nazývá *unifikací* cesty $u_1 u_2$.
2. Nechť w, w' jsou cesty v Φ_Σ. w' se nazývá *permutací* cesty w, jestliže existují cesty $u_1, \dots, u_4$ takové, že $w = u_1 u_2 u_3$, $w' = u_1 u_4 u_3$ a u_4 je dekompozicí nebo unifikací cesty u_2
3. Nechť $w_1, w_2, \dots, w_n$ jsou cesty v Φ_Σ. $(w_1, \dots, w_n)$ se nazývá *permutační posloupností*, jestliže pro $i = 1, \dots, n-1$ je cesta w_{i+1} permutací cesty w_i

❖ **Tvrzení 5.1**: Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém, $c_1, c_2, c_3 \in C_\Sigma$ a nechť $G_1, G_2 \subseteq E_\Sigma$ jsou disjunktní a neprázdné.

1. Jestliže $v = c_1(G_1 \cup G_2)c_2$ je hrana v Φ_Σ, pak existuje dekompozice cesty v ve tvaru $c_1 G_1 c G_2 c_2$ pro nějaké $c \in C_\Sigma$
2. Nechť $u_1 = c_1 G_1 c_3$ a $u_2 = c_3 G_2 c_2$ jsou hrany grafu Φ_Σ a nechť $\tilde{u_1} \circ \tilde{u_2} \colon K \to \Sigma$. Pak $\forall t_1, t_2 \in T_K \colon \; t_1 \,\underline{co}\, t_2 \;\Leftrightarrow\; c_1(G_1 \cup G_2)c_2$ je hrana v Φ_Σ.

Důkaz (ad. 2): $\forall t_1, t_2 \in T_K \colon \; t_1 \,\underline{co}\, t_2$ právě když existuje elementární proces $p \colon K \to \Sigma$, pro který $p({}^\circ K) = c_1$, $p(K^\circ) = c_2$. A $p(T_K) = G_1 \cup G_2$, právě když $c_1(G_1 \cup G_2)c_2$ je hrana v Φ_Σ (viz. Lemma 5.1). □

❖ **Theorem 5.1**: Dvě cesty w, w' v grafu Φ_Σ přísluší stejnému procesu, právě když existuje permutační posloupnost z w do w'.