Petriho sítě

PES 2007/2008

Prof. RNDr. Milan Češka, CSc.

ceska@fit.vutbr.cz

Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

vojnar@fit.vutbr.cz

Sazba: Ing. Petr Novosad, Doc. Ing. Tomáš Vojnar, Ph.D.

(verze 27.2.2008)

FIT, VUT v Brně, Božetěchova 2, CZ-612 66 Brno

C/E sítě
(Condition/Event Nets)

1. Případy a kroky

- Základní sémantika C/E sítí:
  - prvky z množiny P označují booleovské *podmínky* (conditions)
  - prvky z množiny T označují *události* (events)

- **Definice 1.1**: Nechť $N = (B, E, F)$ je C/E síť.

1. Podmožina $c \subseteq B$ se nazývá *případ* (case)
2. Nechť $e \in E$ a $c \subseteq B$. Událost e je *proveditelná*, přesněji c-*proveditelná*, jestliže

$$\boxed{{}^{\bullet}e \subseteq c \quad \wedge \quad e^{\bullet} \cap c = \emptyset}$$

3. Nechť $e \in E$, $c \subseteq B$ a nechť e je c-proveditelná. Případ c'

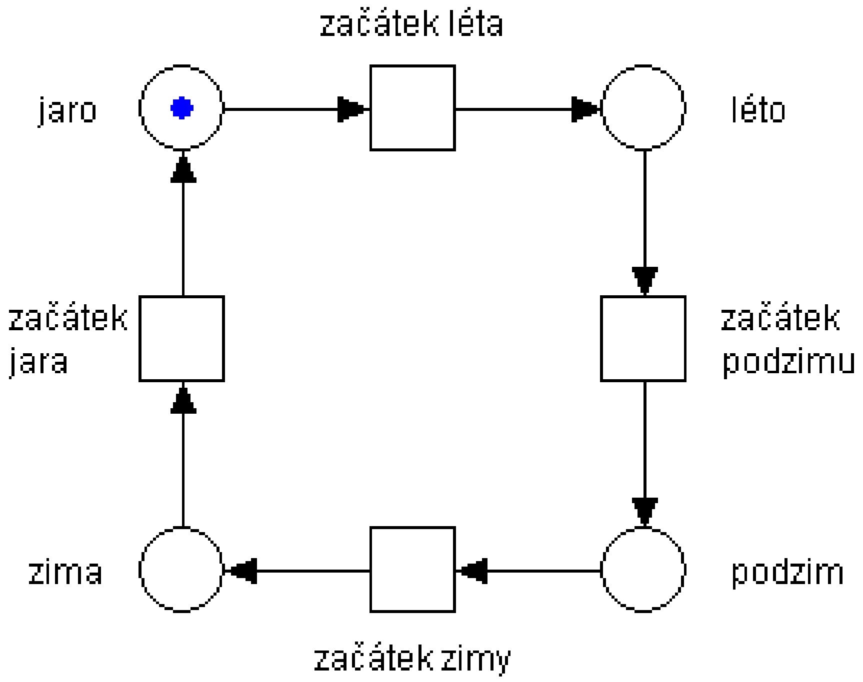
$$\boxed{c' = (c \setminus {}^{\bullet}e) \cup e^{\bullet}}$$

se nazývá *následným případem* c (následníkem k c) při události e. Píšeme

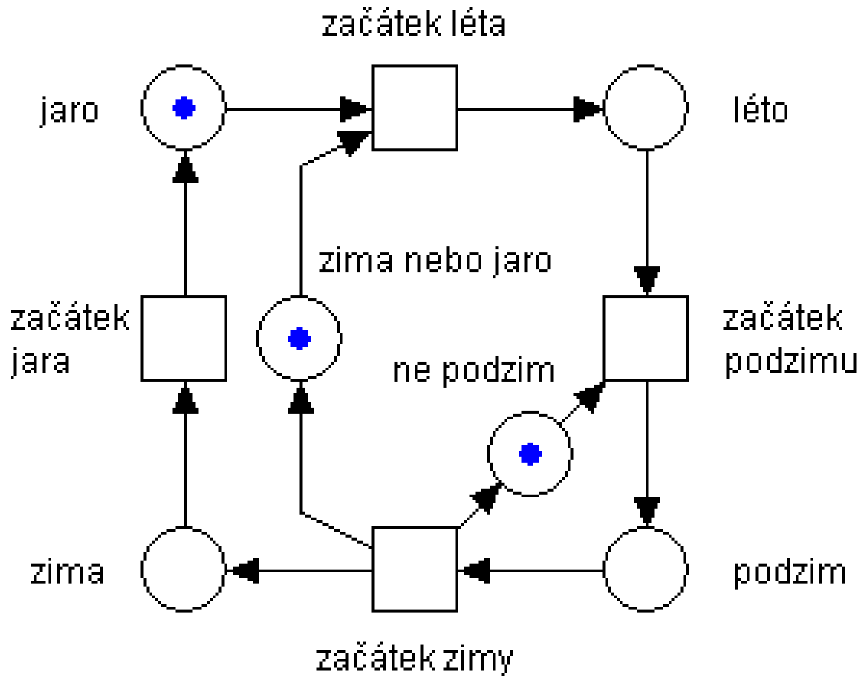
$$\boxed{c[e\rangle c'}$$

Poznámka: Grafické vyznačení případu c: množina podmínek s tečkami (značkami)

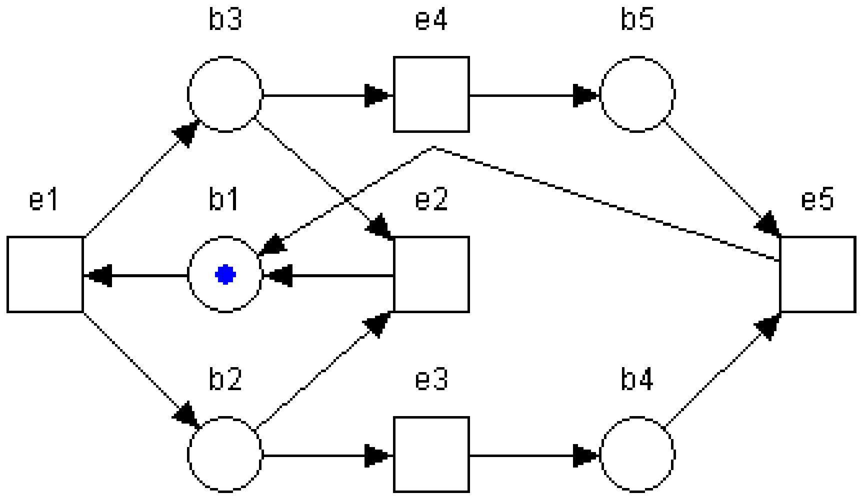
❖ **Příklad 1**: Model změn ročních období



❖ **Příklad 2**: Alternativní model příkladu 1



❖ **Příklad 3**: Ilustrační příklad



$$\{b_1\}\ [e_1\rangle\ \{b_2, b_3\}\ [e_4\rangle\ \{b_2, b_5\}\ [e_3\rangle\ \{b_4, b_5\}\ [e_5\rangle\ \{b_1\}$$

Různé typy závislostí událostí:

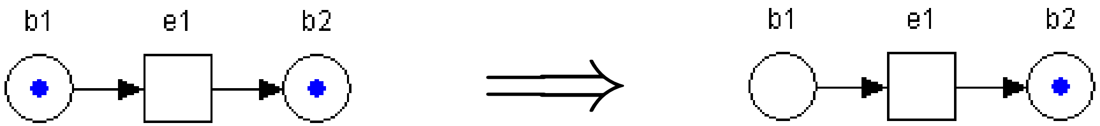
- e_1 předchází e_3 i e_4
- e_3, e_4 jsou alternativy k e_2
- e_3, e_4 mohou být sloučeny (kombinovány) do 1 kroku

❖ **Poznámka**:
Situace, kdy ${}^\bullet e \subseteq c \ \ \wedge \ \ e^\bullet \cap c \neq \emptyset$ pro nějaké c a e, se nazývá *kontaktní situací* .

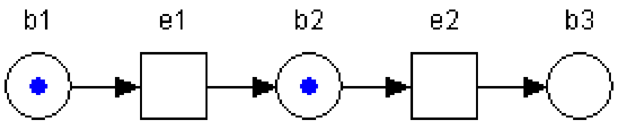
Proč vadí?

1. “proměnná s určitým obsahem je znovu načtena”,
   avšak “začne podzim v případě, že je podzim”
2. nejednoznačnost

Předpokládejme, že připustíme

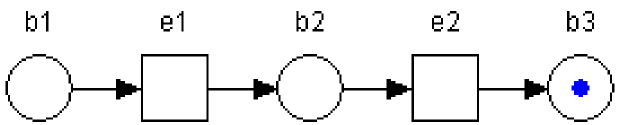


Potom v následující situaci, kdy události e_1 a e_2 provedeme právě jednou

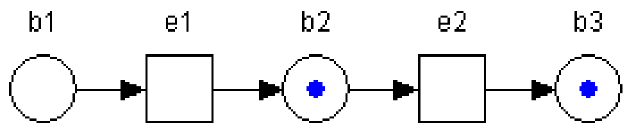


bude záviset na pořadí jejich provedení a nevíme, zda výsledkem

bude případ



nebo případ



Definice 1.2: Nechť $N = (B, E, F)$ je síť.

1. Množina událostí $G \subseteq E$ se nazývá *nezávislá* (detached), jestliže

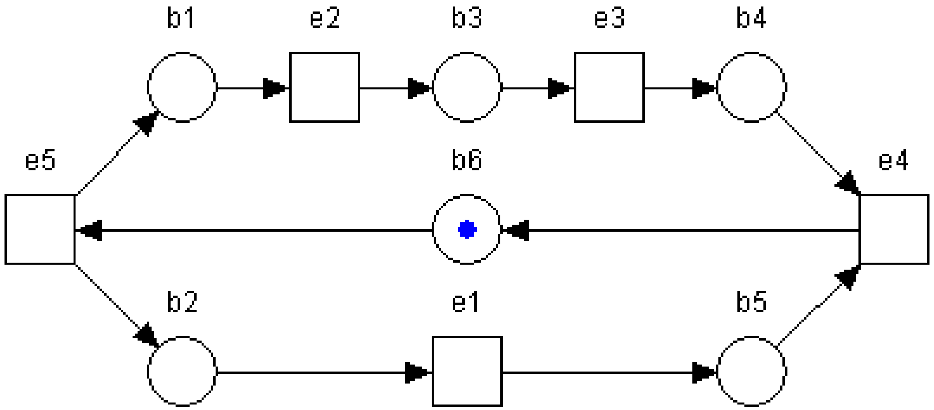
$$\boxed{\forall e_1, e_2 \in G\colon\ e_1 \neq e_2 \ \Rightarrow\ {}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 = \emptyset = e_1^\bullet \cap e_2^\bullet}$$

2. Nechť c, c' jsou případy N a nechť $G \subseteq E$ je nezávislá množina událostí. G se nazývá *krokem* (step) z c do c' (notace $c[G\rangle c'$), jestliže každá událost $e \in G$ je c-proveditelná a

$$\boxed{c' = (c \setminus {}^\bullet G) \cup G^\bullet}$$

Lemma 1.1: $$\boxed{c[G\rangle c' \ \Leftrightarrow\ c \setminus c' = {}^\bullet G \ \wedge\ c' \setminus c = G^\bullet}$$

❖ **Příklad 4**:



$\{e_1, e_2\}$ je krok z $\{b_1, b_2\}$ do $\{b_3, b_5\}$
$\{e_1, e_3\}$ je krok z $\{b_2, b_3\}$ do $\{b_4, b_5\}$

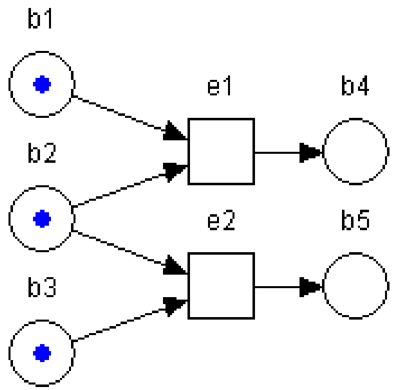
Poznámka: Krok je důležitým pojmem pro popis procesů generovaných danou sítí (viz dále).

❖ **Lemma 1.2**: Nechť N je síť, c, c' případy sítě N a nechť G je konečný krok z c do c'. Nechť $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ je libovolné uspořádání událostí kroku $G = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Pak existují případy $c_0, c_1, \ldots, c_n$ takové, že

$$\boxed{\begin{array}{l} c = c_0,\ c' = c_n \quad \text{a} \\ c_{i-1}[e_i\rangle c_i \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, n \end{array}}$$

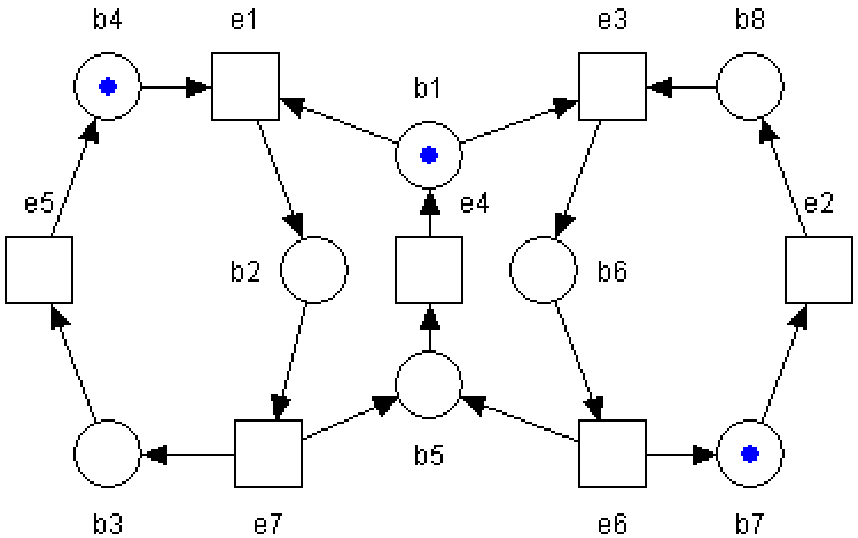
Důkaz: Nechť $e, e' \in G$ a nechť c je případ, ve kterém jsou proveditelné obě události e, e'. Pak ${}^\bullet e \cap {}^\bullet e' = \emptyset \;\; \wedge \;\; e^\bullet \cap e'^\bullet = \emptyset$. Takže když $c[e\rangle c'$, pak ${}^\bullet e' \subseteq c'$. Analogicky platí $e'^\bullet \cap c' = \emptyset$, a tedy e' je proveditelná v c'. Zbytek indukce. □

❖ **Příklad 5**: Konflikt a zmatek (confusion)



konflikt

Konflikt mezi e_1 a e_2 v podmínce b_2.



confusion

Jestli se e_1 objeví před e_2, pak nebude konflikt mezi e_1 a e_3. Avšak jestli e_2 bude před e_1, pak vzniká konflikt v podmínce b_1.

Protože neexistuje specifikace pořadí e_1 a e_2, je tato situace označována jako confusion.

2. C/E systémy

Omezuje se množina případů C:

1. C je “uzavřena”
2. C je “dostatečně” veliká
   (a) Každé události přísluší případ
   (b) Každá podmínka patří alespoň do jednoho případu, avšak ne do každého (to vylučuje smyčky a izolované prvky)
   (c) Nepovolují se dvě podmínky (události), které mají shodné presety a postsety

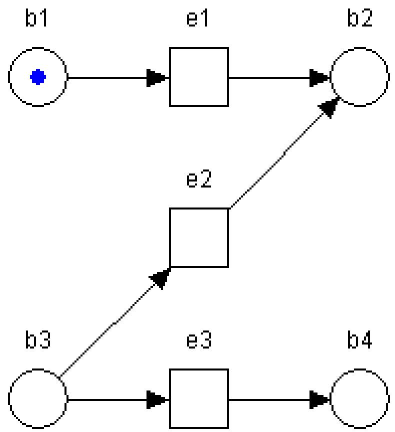
❖ **Definice 2.1**: Čtveřice $\Sigma = (B, E, F, C)$ se nazývá *C/E systém*, jestliže:

1. (B, E, F) je jednoduchá síť bez izolovaných prvků, $B \cup E \neq \emptyset$
2. $C \subseteq 2^B$ je ekvivalenční třídou vzhledem k *relaci dosažitelnosti* $R_\Sigma = (r_\Sigma \cup r_\Sigma^{-1})^*$, kde $r_\Sigma \subseteq 2^B \times 2^B$ je dána vztahem

   $$\boxed{c_1 r_\Sigma c_2 \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists G \subseteq E : c_1[G\rangle c_2}$$

   C se nazývá *případová třída* (case class) sítě Σ.
3. $\forall e \in E \; \exists c \in C$ tak, že e je c-proveditelná

❖ **Příklad 6**: C/E systém



případová třída
$C = \{\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \{b_4\}\}$

❖ **Poznámka**: Případová třída C libovolného C/E systému je plně určena libovolným prvkem (případem) z C.

❖ **Tvrzení 2.1**: Nechť Σ je C/E systém.

1. $B_\Sigma \neq \emptyset \;\wedge\; E_\Sigma \neq \emptyset \;\wedge\; F_\Sigma \neq \emptyset$
2. Pro $c \in C_\Sigma$, $c' \subseteq B_\Sigma$ a $G \subseteq E_\Sigma$
   $c[G\rangle c' \;\Rightarrow\; c' \in C_\Sigma$
   $c'[G\rangle c \;\Rightarrow\; c' \in C_\Sigma$
3. $\forall b \in B_\Sigma\ \exists c, c' \in C_\Sigma$ tak, že $b \in c \;\wedge\; b \notin c'$
4. Σ je čistá síť

❖ **Tvrzení 2.2**: Nechť Σ je C/E systém a nechť $\hat{r} \subseteq 2^{B_\Sigma} \times 2^{B_\Sigma}$ je relace definována vztahem $c_1 \hat{r} c_2 \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \exists e \in E_\Sigma : c_1[e\rangle c_2$. Je-li E_Σ konečná množina, pak

$$\boxed{R_\Sigma = (\hat{r} \cup \hat{r}^{-1})^*}$$

Důkaz: Pro $\hat{R} = (\hat{r} \cup \hat{r}^{-1})^*$ platí triviálně $\hat{R} \subseteq R_\Sigma$. Protože E_Σ je konečná, každý krok sítě Σ je konečný, a proto z Lemma 1.2 plyne $r_\Sigma \subseteq \hat{r}^*$ a $r_\Sigma^{-1} \subseteq (\hat{r}^{-1})^*$. Z toho pak dostaneme $R_\Sigma \subseteq \hat{R}$. $\square$

3. Cyklické a živé systémy

- **Definice 3.1**: C/E systém Σ se nazývá *cyklický*, jestliže

$$\boxed{\forall c_1, c_2 \in C_\Sigma : \; c_1 r^*_\Sigma c_2}$$

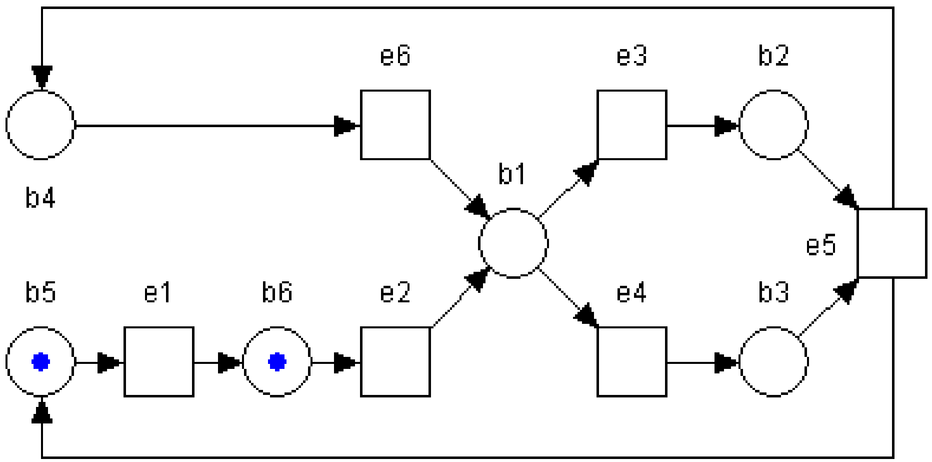
- **Tvrzení 3.1**: Nechť Σ je cyklický C/E systém a nechť $c \in C_\Sigma$. Pak $C_\Sigma = \{c' | c\, r^*_\Sigma c'\}$.

- **Definice 3.2**: C/E systém Σ je *živý*, jestliže $\forall c \in C_\Sigma \;\; \forall e \in E_\Sigma \;\; \exists c' \in C_\Sigma$ takový, že $c\, r^*_\Sigma c'$ a e je c'-proveditelná.

- **Tvrzení 3.2**: Každý cyklický C/E systém je živý.

Důkaz: Nechť $c \in C_\Sigma$ a $e \in E_\Sigma$. Podle Definice 2.1 existuje $c' \in C_\Sigma$ takový, že e je c'-proveditelná. Podle Definice 3.1 platí $c\, r^*_\Sigma c'$. $\square$

❖ **Příklad 7**: C/E systém, který je živý, ale není cyklický



Případ $\{b_5, b_6\}$ není reprodukovatelný.

4. Ekvivalence C/E systémů

❖ **Definice 4.1**: Nechť Σ a Σ' jsou C/E systémy.

1. Jsou-li dány bijekce $\gamma\colon C_\Sigma \to C_{\Sigma'}$ a $\epsilon\colon E_\Sigma \to E_{\Sigma'}$, pak systémy Σ a Σ' nazýváme *(γ,ϵ)-ekvivalentní*, jestliže pro všechny případy $c_1, c_2 \in C_\Sigma$ a všechny množiny událostí $G \subseteq E_\Sigma$ platí:

$$\boxed{c_1[G\rangle c_2 \;\Leftrightarrow\; \gamma(c_1)\,[\epsilon(G)\rangle\,\gamma(c_2)}$$

2. Σ a Σ' jsou *izomorfní*, jestliže sítě $(B_\Sigma, E_\Sigma, F_\Sigma)$ a $(B_{\Sigma'}, E_{\Sigma'}, F_{\Sigma'})$ jsou izomorfní při bijekci β a jestliže

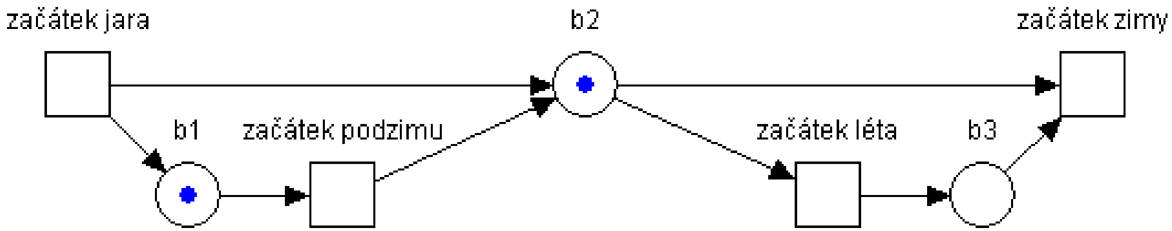
$$\boxed{c \in C_\Sigma \;\Leftrightarrow\; \{\beta(b) \mid b \in c\} \in C_{\Sigma'}}$$

❖ **Notace**: $\Sigma \sim \Sigma'$ jsou-li Σ a Σ' ekvivalentní

❖ **Tvrzení 4.1**: $\sim$ je relace ekvivalence

❖ **Tvrzení 4.2**: Ekvivalentní C/E systémy mají vždy stejný počet případů, událostí a kroků. Mohou se lišit v mohutnosti množin podmínek.

❖ **Příklad 8**: C/E systém ekvivalentní se systémem z příkladu 1 a 2



$$\begin{array}{ccc} \{b_1, b_2\} & \equiv & \{\text{jaro}\} \\ \{b_1, b_3\} & \equiv & \{\text{léto}\} \\ \{b_2, b_3\} & \equiv & \{\text{podzim}\} \\ \emptyset & \equiv & \{\text{zima}\} \end{array}$$

❖ **Tvrzení 4.3**: Nechť Σ a Σ' jsou ekvivalentní C/E systémy.

1. Σ je cyklický $\iff$ Σ' je cyklický
2. Σ je živý $\iff$ Σ' je živý

❖ **Lemma 4.1**: Nechť Σ a Σ' jsou C/E systémy, pro které platí $\forall c \in C_\Sigma \cup C_{\Sigma'}: \ |c| = 1$. Σ a Σ' jsou ekvivalentní, právě když jsou izomorfní.

5. Bezkontaktní C/E systémy

❖ **Definice 5.1**: Nechť Σ je C/E systém a nechť $b, b' \in B_\Sigma$.

1. b' se nazývá *komplement* b, jestliže ${}^\bullet b = b'^\bullet$ a $b^\bullet = {}^\bullet b'$
2. Σ se nazývá *úplný*, jestliže každý prvek $b \in B_\Sigma$ má komplement $b' \in B_\Sigma$

❖ **Lemma 5.1**: Nechť Σ je C/E systém a nechť $b \in B_\Sigma$.

- b má nejvýše jeden komplement; označme jej $\widehat{b}$

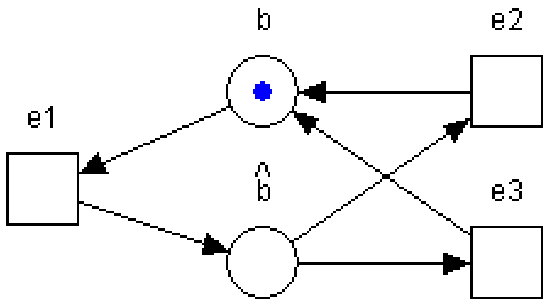
Jestliže b má komplement $\widehat{b}$, pak

- $\widehat{b}$ má komplement a $\widehat{\widehat{b}} = b$
- $\forall c \in C_\Sigma : \; b \in c \;\; \vee \;\; \widehat{b} \in c$

Je-li Σ úplný C/E systém, pak

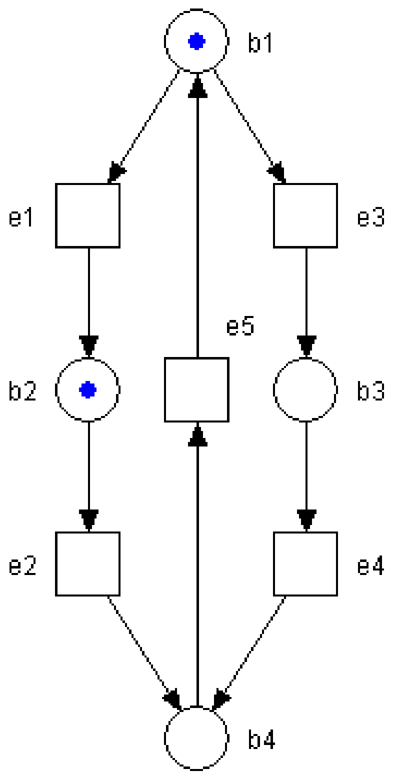
- $\forall e \in E_\Sigma : \; |{}^\bullet e| = |e^\bullet|$
- $\forall c \in C_\Sigma : \; |c| = \frac{1}{2}|B_\Sigma|$

❖ **Příklad 9**: Podmínka b a její komplement $\widehat{b}$



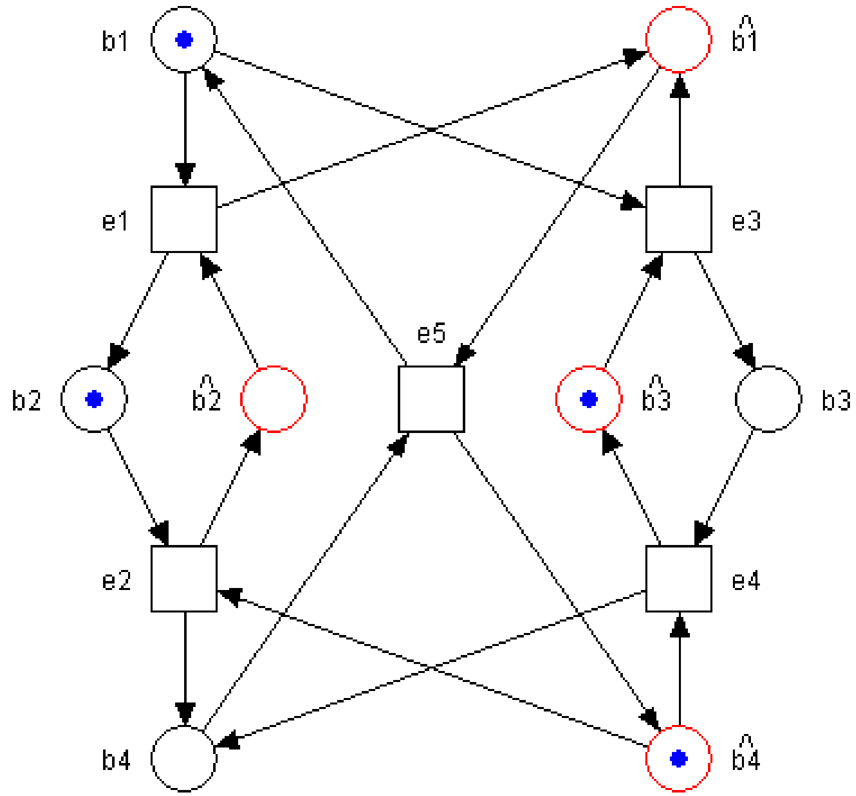
❖ **Definice 5.2**: Nechť Σ je C/E systém a nechť $B \subseteq B_\Sigma$ je množina podmínek, které nemají komplement v B_Σ. Pro každé $b \in B$ nechť $\widehat{b}$ označuje nový prvek. Položme $F = \{(e, \widehat{b}) |\ (b, e) \in F_\Sigma \ \wedge \ b \in B\} \cup \{(\widehat{b}, e) |\ (e, b) \in F_\Sigma \ \wedge \ b \in B\}$. Pro $c \in C_\Sigma$ nechť $\varphi(c) = c \cup \{\widehat{b} |\ b \in B \ \wedge \ b \notin c\}$. Pak C/E systém $\widehat{\Sigma} = (B_\Sigma \cup \{\widehat{b} |\ b \in B\}, E_\Sigma, F_\Sigma \cup F, \varphi(C_\Sigma))$ je *komplementací systému* Σ. $\varphi(c)$ je *komplementací* c.

❖ **Příklad 10**: C/E systém Σ a jeho komplementace $\widehat{\Sigma}$



Σ

$\Longrightarrow$



$\widehat{\Sigma}$

červená zvýrazňuje nové prvky

❖ **Tvrzení 5.1**: Nechť Σ je C/E systém a $c \in C_\Sigma$.

1. $\widehat{\widehat{\Sigma}} = \widehat{\Sigma}$
2. $\forall b \in B_\Sigma \; \forall c \in C_\Sigma : \; b \in \varphi(c) \;\Leftrightarrow\; \widehat{b} \notin \varphi(c)$
3. $c = \varphi(c) \;\cap\; B_\Sigma$

Notace: Nechť Σ je C/E systém a nechť $e \in E_\Sigma$. Označme ${}^{-}e$, resp. e^{-} preset resp. postset události e v $\widehat{\Sigma}$ (na rozdíl od ${}^{\bullet}e, e^{\bullet}$ v Σ).

❖ **Tvrzení 5.2**: Nechť Σ je C/E systém a nechť $G \subseteq E_\Sigma$ a B je množina podmínek, které nemají komplement.

1. ${}^{-}G = {}^{\bullet}G \;\cup\; \{\widehat{b} |\; b \in B \;\;\wedge\;\; b \in G^{\bullet}\}$
   $G^{-} = G^{\bullet} \;\cup\; \{\widehat{b} |\; b \in B \;\;\wedge\;\; b \in {}^{\bullet}G\}$
2. ${}^{\bullet}G = {}^{-}G \;\cap\; B_\Sigma$, $G^{\bullet} = G^{-} \;\cap\; B_\Sigma$

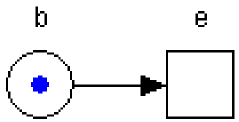
❖ **Theorem 5.1**: Je-li $\widehat{\Sigma}$ komplementací systému Σ, pak $\widehat{\Sigma}$ a Σ jsou ekvivalentní.

Důkaz.

❖ **Definice 5.3**: Nechť Σ je C/E systém. Σ se nazývá *bezkontaktní* , jestliže pro každé $e \in E_\Sigma$ a každé $c \in C_\Sigma$ platí:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{(1) } {}^\bullet e \subseteq c \;\Rightarrow\; e^\bullet \subseteq B_\Sigma \setminus c \\ \text{(2) } e^\bullet \subseteq c \;\Rightarrow\; {}^\bullet e \subseteq B_\Sigma \setminus c \end{array}}$$

Poznámka: Podmínka (2) neplyne vždy s (1). Prověř



❖ **Theorem 5.2**:

1. Každý úplný C/E systém je bezkontaktní
2. Pro každý C/E systém existuje ekvivalentní bezkontaktní systém
3. Je-li Σ bezkontaktní, pak $\forall e \in E_\Sigma : \ {}^\bullet e \neq \emptyset \ \wedge \ e^\bullet \neq \emptyset$

6. Případové grafy (Case Graphs)

❖ **Základní sémantika**:

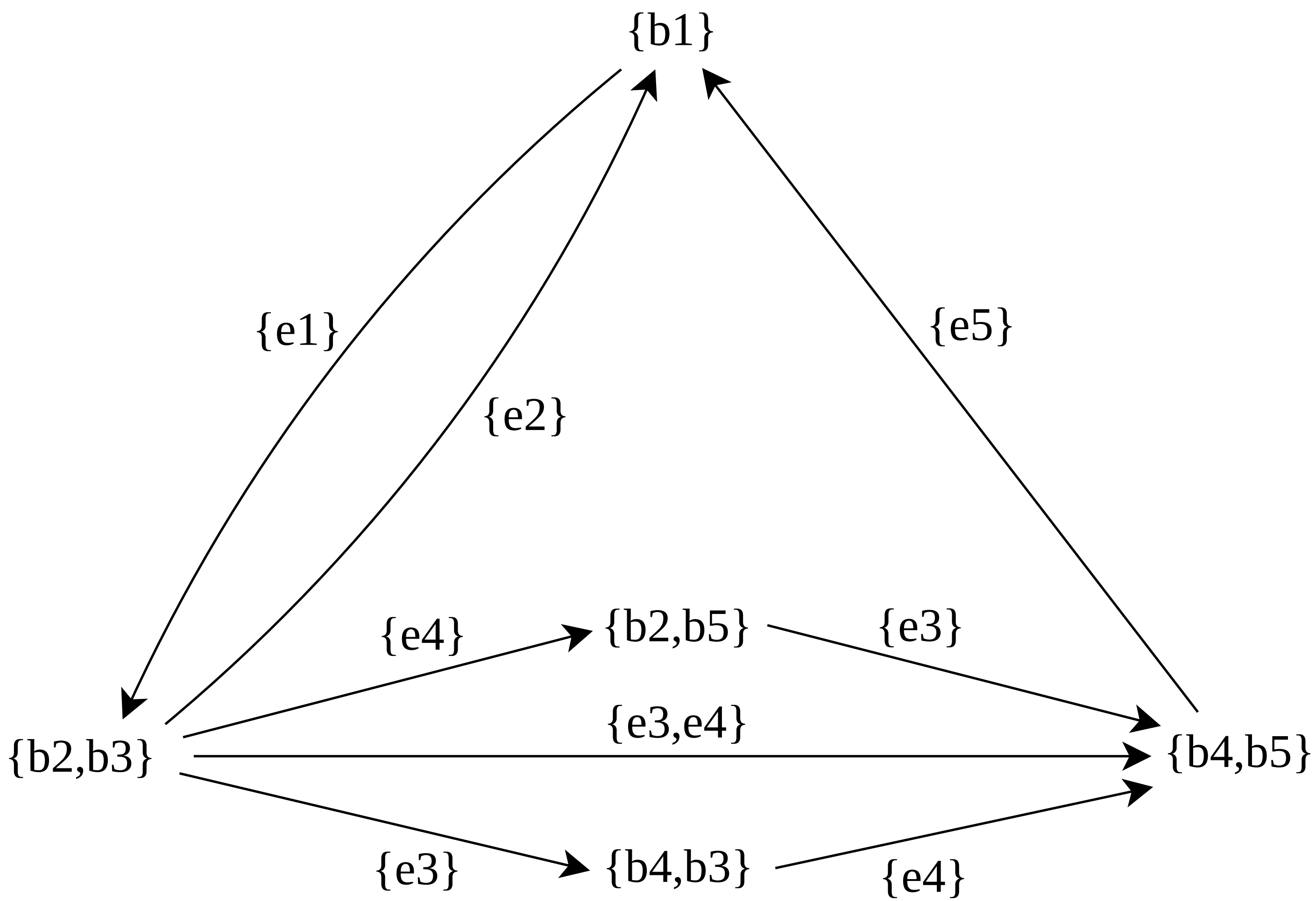
- uzly reprezentují případy
- hrany reprezentují kroky

❖ **Definice 6.1**: Nechť Σ je C/E systém, γ nechť je množina všech kroků systému Σ a nechť H je množina

$$\boxed{H = \{(c_1, G, c_2) \in C_\Sigma \times \gamma \times C_\Sigma |\ c_1[G\rangle c_2\}}$$

Pak graf $\Phi_\Sigma = (C_\Sigma, H)$ se nazývá *případový graf* (case graph) C/E systému Σ.

❖ **Příklad 11**: Případový graf odpovídající systému z Příkladu 3



❖ **Theorem 6.1**: C/E systém Σ je cyklický, právě když je jeho případový graf silně souvislý.

Důkaz: Σ je cyklický
$\Leftrightarrow \; \forall c, c' \in C_\Sigma : \; (c \, r^*_\Sigma c')$
$\Leftrightarrow \; \forall c, c' \in C_\Sigma \; \exists G_1, \ldots, G_n \in \gamma \; \exists c_0, \ldots, c_n \in C_\Sigma : \; c_0[G_1\rangle c_1 \ldots [G_n\rangle c_n \; \wedge$
$c_0 = c \; \wedge \; c_n = c'$
$\Leftrightarrow \; \Phi_\Sigma$ je silně souvislý $\square$

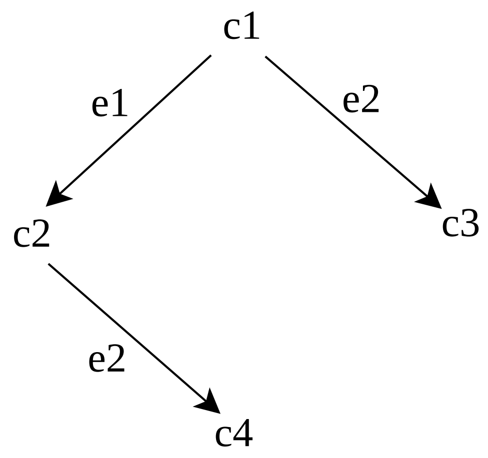
❖ **Theorem 6.2**: C/E systém Σ je živý, když a jen když pro každé $c_0 \in C_\Sigma$ a pro každé $e \in E_\Sigma$ existuje cesta v $\Phi_\Sigma : \; c_0 h_1 c_1 \ldots c_{n-1} h_n c_n$, kde $h_n = \{e\}$.

Důkaz: Σ je živý $\; \Leftrightarrow \; \forall c_0 \in C_\Sigma \; \forall e \in E_\Sigma \; \exists c, c' \in C_\Sigma : \; c_0 r^*_\Sigma c \; \wedge \; c[e\rangle c' \; \Leftrightarrow$
v Φ existuje cesta $c_0 h_1 \ldots c_{n-1} h_n c_n$, kde $c_{n-1} = c$, $h_n = \{e\}$ a $c_n = c'$ $\square$

❖ **Theorem 6.3**: Dva C/E systémy jsou ekvivalentní, právě když jsou jejich případové grafy izomorfní.

Důkaz.

❖ **Příklad 12**: Ne každý graf je případovým grafem C/E systému



Například graf v příkladu 12 není případovým grafem žádného C/E systému:

- V případě c_1 jsou proveditelné události e_1 a e_2
- Jestliže existuje konflikt mezi e_1 a e_2, pak e_2 není c_2-proveditelná a graf nesmí mít hranu $(c_2, \{e_2\}, c_4)$
- Jestliže tento konflikt neexistuje, pak e_1 je proveditelná také v c_3 a tudíž chybí hrana $(c_3, \{e_1\}, c_4)$

V “silně” paralelních systémech se případový graf stává velmi složitým. Například krok, který obsahuje n událostí generuje $2^n - 1$ hran v případovém grafu.

❖ **Theorem 6.4**: Nechť Σ je C/E systém, $c_1, c_2, c_3 \in C_\Sigma$ a $G_1, G_2 \subseteq E_\Sigma$.

1. Jestli $c_1 G_1 c_2 G_2 c_3$ je cesta v Φ_Σ, pak $G_1 \cap G_2 = \emptyset$
2. Nechť $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Jestli $c_1(G_1 \cup G_2)c_3$ je hrana v Φ_Σ, pak existuje $c \in C_\Sigma$ tak, že $c_1 G_1 c G_2 c_3$ je také cesta v Φ_Σ.

Důkaz:

1. $e \in G_1 \;\Rightarrow\; c_2 \cap {}^\bullet e = \emptyset \;\Rightarrow\; e$ není c_2-proveditelná $\;\Rightarrow\; e \notin G_2$
2. $c_1(G_1 \cup G_2)c_2$ je hrana $\Phi_\Sigma \;\Rightarrow\; c_1[G_1 \cup G_2\rangle c_2 \;\Rightarrow\; c_1[G_1\rangle c \;\wedge\; c[G_2\rangle c_2$, kde $c = (c_1 \setminus {}^\bullet G_1) \cup G_1^\bullet$

$\square$