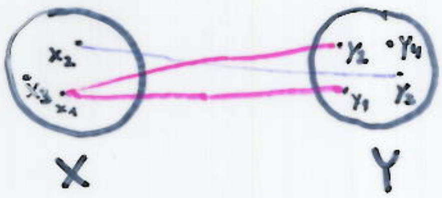
1. Binární relace

Definice 1.1.

Nechť X, Y jsou libovolné množiny. Binární relací z X do Y nazýváme trojici $\langle R, X, Y\rangle$, kde $R \subseteq X \times Y$.



$R = \{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_1, y_2\rangle, \langle x_2, y_3\rangle\}$

Je-li $\langle x, y\rangle \in R$, říkáme x je v relaci R s y a píšeme xRy.

Definice 1.2.

Nechť $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ jsou binární relace $\mathcal{R} = \langle R, X, Y\rangle$ a $\mathcal{S} = \langle S, U, V\rangle$

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} = \langle R \cup S, X \cup U, Y \cup V\rangle$$
$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \langle R \cap S, X \cap U, Y \cap V\rangle$$
$$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \overset{df}{\iff} R \subseteq S \wedge X \subseteq U \wedge Y \subseteq V$$ (říkáme také $\mathcal{R}$ implikuje $\mathcal{S}$)

Definice 1.3.

Nechť $\langle R, X, Y\rangle$ je binární relace. Levý obor L_R, resp. pravý obor P_R relace R definujeme takto:

$$L_R = \{x \mid x \in X \wedge \exists y \in Y\, (xRy)\}$$
$$P_R = \{y \mid y \in Y \wedge \exists x \in X\, (xRy)\}$$

Platí: $L_R = \emptyset \iff P_R = \emptyset \iff R = \emptyset$

Jazykové konvence:

$L_R = X \wedge P_R \subset Y$	R je relace X do Y
$L_R \subset X \wedge P_R = Y$	R je relace z X na Y
$L_R = X \wedge P_R = Y$	R je relace X na Y

Definice 1.4.

Nechť $\langle R, X, Y\rangle$ je bin. relace a $X_1 \subseteq X$ a $Y_1 \subseteq Y$ lib. podmnožiny. Obrazem podmnožiny X_1 v relaci R je množina

$$R(X_1) = \{y \mid y \in Y \wedge \exists x \in X_1 \, (xRy)\}$$

Vzorem množiny Y_1 v relaci R je množina

$$R^{-1}(Y_1) = \{x \mid x \in X \wedge \exists y \in Y_1 \, (xRy)\}$$

Platí: $L_R = R^{-1}(Y)$ a $P_R = R(X)$

Definice 1.5.

Nechť $\langle R, X, Y\rangle$ je bin. relace. Relaci $\langle R^{-1}, Y, X\rangle$ kde $R^{-1} = \{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$ nazýváme inverzní relací k relaci R.

Platí: $xRy \iff yR^{-1}x$, $L_R = P_{R^{-1}}$, $P_R = L_{R^{-1}}$, $(R^{-1})^{-1} = R$

Definice 1.6.

Nechť $\langle R, X, Y\rangle$, $\langle S, Y, Z\rangle$ jsou bin. relace. Binární relaci $\langle R.S, X, Z\rangle$ definovanou

$$x\, R.S\, z \overset{df}{\iff} \exists y \in Y \, (xRy \wedge ySz)$$

nazýváme složením nebo součinem relací R a S

VĚTA 1.1.

Skládání binárních relací je asociativní, t.j. jsou-li $\langle R, X, Y\rangle$ $\langle S, Y, Z\rangle$ a $\langle T, Z, V\rangle$ relace, pak platí

$$(RS)T = R(ST)$$

D. cvičení

Definice 1.7.

<u>Zobrazením</u> (<u>funkcí</u>) f množiny X do množiny Y nazýváme takovou bin. relaci mn. X do mn. Y, pro kterou platí

$$|f(x)| = 1 \quad \text{pro vš. } x \in X$$

Klasifikace zobrazení:

surjektivní (X <u>na</u> Y) je-li $P_f = Y$

injektivní (prosté) : $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

bijektivní (jednojednoznačné) : surjektivní i injektivní

Definice 1.8.

Nechť f, g jsou zobrazení. f se nazývá <u>restrikcí</u> (zúžením) zobr. g, platí-li $f \subseteq g$.

spec. případ : $L_f = A \subseteq L_g \rightarrow f = g/A$

Relace na (v) množině

$$L_R = P_R = X \qquad R \subseteq X \times X$$

VĚTA 1.2.

Nechť S, T, U a R_i, $i \in I$ jsou lib. relace v množině v množině X.
Pak platí:

(1) $\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right).S = \bigcup_{i \in I} (R_i.S)$

(2) $T.\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right) = \bigcup_{i \in I} (TR_i)$

(3) $\left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^{-1} \quad \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$

(4) $\left(\bigcap_{i \in I} R_i\right)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$

(5) $S \subseteq T \Rightarrow (S.U \subseteq T.U) \wedge (U.S \subseteq U.T$

(6) $(S.T)^{-1} = T^{-1}.S^{-1}$

Význačné relace na množině:

<u>identická relace</u> E: $E = \{\langle x,x\rangle \mid x \in X\}$

<u>prázdná relace</u> O: $O = \emptyset$

Platí: $xEy \iff x = y$

$E.R = R.E = R$ pro lib. $R \subseteq X \times X$

$O.R = R.O = O$ — " —

Definice 1.9.

Nechť R je relace v množině X. R nazýváme

(RE)	reflexivní	platí-li	aRa pro vš. $a \in X$	t.j. $E \subseteq R$
(TR)	tranzitivní		$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$	t.j. $R.R \subseteq R$
(SY)	symetrická		$aRb \Rightarrow bRa$	t.j. $R^{-1} = R$
(ANS)	antisymetrická		$aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$	t.j. $R \cap R^{-1} \subseteq E$
(AS)	asymetrická		$aRb \Rightarrow \neg bRa$	t.j. $R \cap R^{-1} = O$
(IR)	ireflexivní		$\neg aRa$ pro vš. $a \in X$	t.j. $R \cap E = \emptyset$

VĚTA 1.3.

Má-li lib. relace v X některou z vlastností (RE)–(IR), pak stejnou vlastnost má i relace R^{-1}.

D.

VĚTA 1.4.

Mají-li relace R i S vlastnost RE, nebo IR, pak tuto vlastnost mají také relace:

$R \cup S$

$R \cap S$

$R \cdot S$

Mocniny relace

$R^0 = E$

$R^i = R \cdot R^{i-1}$ pro $i > 0$

$R^i = (R^{-i})^{-1}$ pro $i < 0$

Pro $k > 0$ platí $x R^k y$ právě tehdy, existují-li prvky $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1} \in X$ takové, že platí:

$$x R x_1 \wedge x_1 R x_2 \wedge \ldots \wedge x_{k-2} R x_{k-1} \wedge x_{k-1} R y$$

Definice 1.10.

Tranzitivním, resp. reflexivně tranzitivním uzávěrem relace R nazýváme relaci R^+, resp. R^* definovanou vztahem:

$$x R^+ y \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists k > 0 \; (x R^k y)$$

$$x R^* y \overset{df}{\Longleftrightarrow} \exists k \geq 0 \; (x R^k y)$$

což množinově vyjádřeno znamená:

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k$$

$$R^* = E \cup R \cup R^2 \cup \ldots = \bigcup_{k=0}^{\infty} R^k$$

z def. vztahů plynou tyto vlastnosti uzávěrů:

(1) $R \subseteq R^+ \subseteq R^*$

(2) je-li R tranzitivní, pak $R^+ = R$

(3) je-l R tranzitivní a reflexivní relace, pak $R^* = R^+ = R$

VĚTA 1.5

Nechť R^+ je tranzitivní a R^* je tranz.reflexivní uzávěr relace R.

Pak

(1) R^+ je tranzitivní a je-li R' lib. tranzitivní relace taková, že $R \subseteq R'$, pak $R^+ \subseteq R'$

(2) R^* je tranzitivní a reflexivní a je-li R'' lib. tranz. a refl. relace taková, že $R \subseteq R''$, pak $R^* \subseteq R''$.

D.

1.2. Relace ekvivalence

Definice 1.11.

Ekvivalencí na mn. X nazýváme takovou bin. relaci, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní.

Označení: $\equiv, \cong, =, \approx$

VĚTA 1.6.

Každá ekvivalence na neprázdné množině X definuje (indukuje) rozklad na množině X a naopak.

D.

$$[a]_R = \{x \mid x \in X \wedge xRa\}$$

Pojem faktorová množina:

$$X/R = \{[a]_R \mid a \in X\}$$

PŘÍKLAD

Nechť X je mn. celých čísel I, $p>0$ celé číslo. Na I definujeme relaci $\equiv (\mathrm{mod}\ p)$ takto:

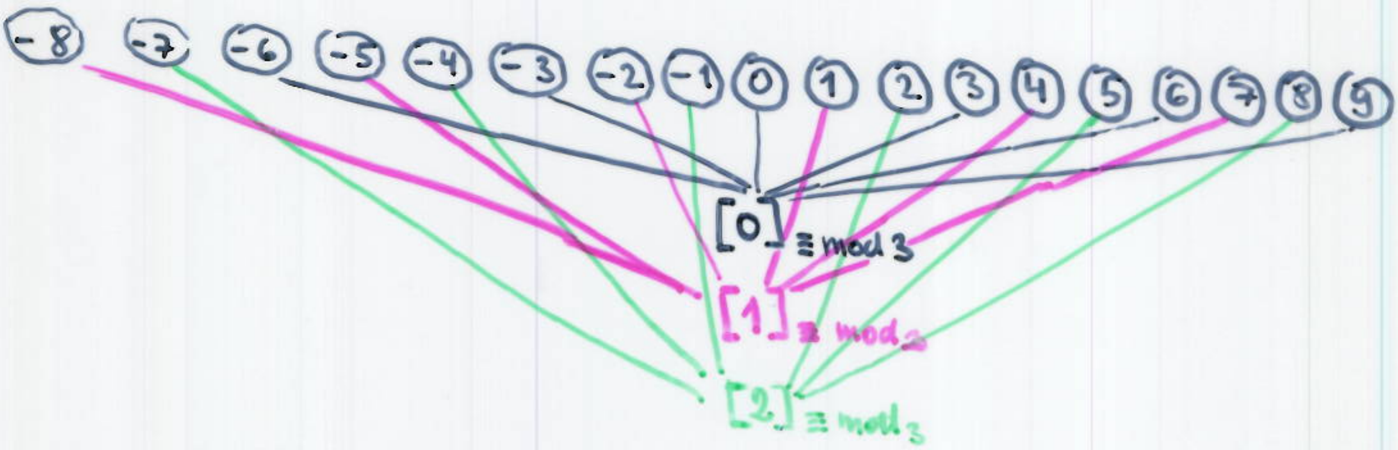
$$\boxed{a \equiv b \overset{df}{\Longleftrightarrow} (a-b) \text{ je dělitelné modulem } p}$$

$\equiv(\mathrm{mod}\ p)$ je ekvivalence
$$\begin{cases} (RE) & a \equiv a \\ (SY) & a \equiv b \Rightarrow b \equiv a \\ (TR) & a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow a \equiv c \end{cases}$$

$$\begin{matrix} a = g_1 p + b \\ b = g_2 p + c \end{matrix} \Rightarrow a - c = g_1 p + g_2 p \Rightarrow a \equiv c$$

$\equiv(\mathrm{mod}\ p)$ indukuje rozklad na I:

$$I/\equiv(\mathrm{mod}\ p) = Z_p$$



$\equiv(\mathrm{mod}\ p)$ se nazývá <u>kongruencí podle modulu p</u>

$I/\equiv(\mathrm{mod}\ p)$ — " — <u>úplnou soustavou zbytkových tříd</u>

VĚTA 1.7.

Nechť R_i, $i \in I$ jsou ekvivalence na X. Pak $\bigcap_{i \in I} R_i$ je také ekvivalence na X. Dále existuje právě jedna ekvivalence R taková, že $R_i \subseteq R$ pro vš. $i \in I$ a je-li S lib. ekvivalence na X, pro niž $R_i \subseteq S$, pak $R \subseteq S$ (existuje jediná minimální „obalující" ekvivalence).

D.

1.č.

Uvažujme dvě ekvivalence R_1, R_2. Dokážeme, že $R_1 \cap R_2$ je rovněž ekvivalencí:

(RE) $E \subseteq R_1 \wedge E \subseteq R_2 \Rightarrow E \subseteq R_1 \cap R_2$

(SY) $R_1 = R_1^{-1} \wedge R_2 = R_2^{-1} \Rightarrow (R_1 \cap R_2)^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1} = R_1 \cap R_2$

(TR) $R_1^2 \subseteq R_1 \wedge R_2^2 \subseteq R_2 \Rightarrow (R_1 \cap R_2)^2 = R_1^2 \cap R_1 R_2 \cap R_2^2 \subseteq R_1^2 \cap R_2^2 \subseteq R_1 \cap R_2$

2.č.

VĚTA 1.8.

Nechť R_1, R_2 jsou ekvivalence na X. Pak $R_1 \cup R_2$ je ekvivalencí právě tehdy, platí-li $R_1 \cdot R_2 \subseteq R_1 \cup R_2$.

D.

(TR) $R_1^2 \subseteq R_1 \wedge R_2^2 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1^2 \cup R_1 R_2 \cup R_2^2 \subseteq R_1 \cup R_2 \cup R_1 \cdot R_2$

Důsledek

Nejmenší „obalující ekvivalence" R systému ekvivalencí $\{R_i\}$

$$\boxed{R = \left(\bigcup_{i \in I} R_i\right)^+}$$

Pozn. Relace tolerance.

1.4. Reprezentace relací

Numerace množiny X

$$ord_X : X \leftrightarrow N_{|X|}$$

Nechť $\langle R, X, Y \rangle$ je bin. relace, ord_X a ord_Y jsou numerace jejích oborů, $ord_X(x) = ord_Y(y) \Rightarrow x = y \wedge x \in X \cap Y$. Existují tyto reprezentace mn. R :

1. $set(R) = \{ \langle ord_X(x), ord_Y(y) \rangle \mid x \in X, y \in Y, xRy \}$

2. Bool. matice $mat(R) = [m_{ij}]$ typu $(|X| / |Y|)$:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{je-li } xRy \\ 0 & \text{je-li } \neg xRy \end{cases}$$

$x = ord_X^{-1}(i)$, $y = ord_Y^{-1}(j)$

3. $suc(R) = \{ \langle ord_X(x), \{ ord_Y(y) \mid y \in R(x) \} \rangle \mid x \in L_R \}$

4. orientovaným grafem

$xRy \rightarrow$ 

PŘÍKLAD

MATICOVÝ RELAČNÍ KALKUL

Nechť $A = mat(R)$, $B = mat(S)$; R, S jsou relace v X (čt. matice), $|X| = n$

(1) $mat(R^{-1}) = A^T$

(2) $mat(R.S) = A.B$ $\quad + \Leftrightarrow \vee$, $* \Leftrightarrow \wedge$

(3) $mat(R \cup S) = A \vee B$

(4) $mat(R \cap S) = A \wedge B$

(5) $mat(E) = E$ - jedn. matice

(6) $mat(0) = 0$ - nulová matice

Vyšetření vlast. (RE)-(IR) : např. (TR) $A.A \Rightarrow A$

Výpočet tranzitivního uzávěru relace $\langle R, X, X \rangle$

A. Z definice:

$$R^+ = \bigcup_{i=1}^{k} R^i \quad, k = \min(|X|-1, |R|)$$

B. Warshalův algoritmus:

Vstup: $A = mat(R)$

Výstup: $B = mat(R^+)$

Metoda:

(1) Polož $B = A$, $i = 1$

(2) Pro vš. j, je-li $B[j,i] = 1$, pak pro $k = 1, 2, \dots n$ polož $B[j,k] = B[j,k] + B[i,k]$

(3) Polož $i = i + 1$

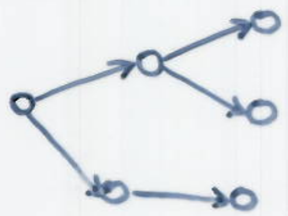
(4) Je-li $i \leq n$, vrať se ke kroku (2), v opačném případě je B výsledná matice

Příklady relací s vlastnostmi reflexivity - R, symetrie - S, tranzitivity - T.

Nechť V značí relace má vlastnost V

$\overline{V}$ — " — nemá — " — , $V \in \{R, S, T\}$

① $\overline{R}\,\overline{S}\,\overline{T}$ (největší skupina relací)

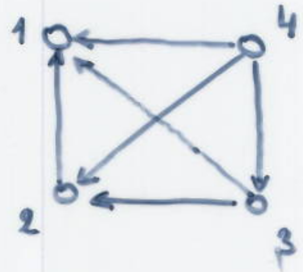


např. vztah předchůdce - následník (otec - syn)

② $\overline{R}\,\overline{S}\,T$

relace „být větší" na číselné množině

$A = \{1, 2, 3, 4\}$



③ $\overline{R}\,S\,\overline{T}$

relace „sousednosti" na množině I celých čísel

ϱ - relace

$$i \varrho j \overset{df}{\iff} |i-j| = 1, \quad i, j \in I$$

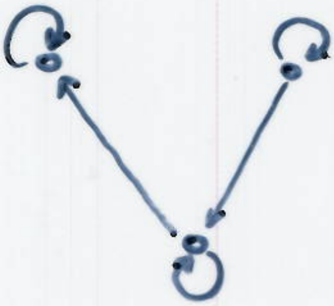
$A \subset I$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$

④ $\overline{R}\,S\,T$

relace „být žákem téže školy" na množině lidí

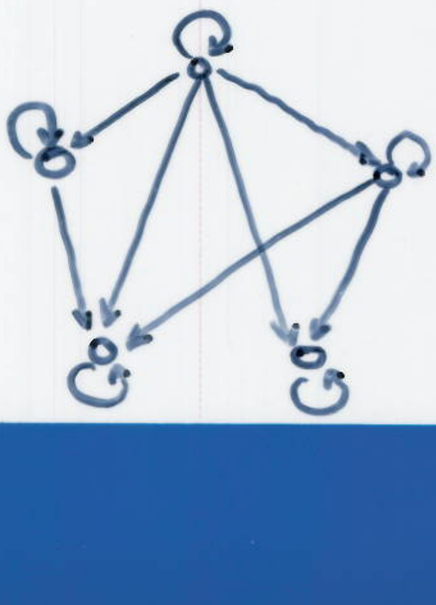
⑤ $R\,\overline{S}\,\overline{T}$

relace „být zákonným zástupcem"



⑥ $R\,\overline{S}\,T$

množinová inkluze : $\subseteq$



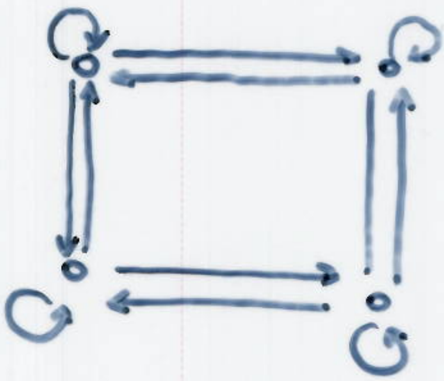
⑦ RS$\overline{T}$

relace ϱ – ohraničená vzdálenost v I

$i \varrho j \overset{df}{\iff} |i-j| \leq m$, m je pevně zvolené číslo

TR:

$m=2$, pak $1 \varrho 2$, $2 \varrho 4$ avšak $\neg 1 \varrho 4$



⑧ RST

relace „zaměnitelnosti“