JAZYKY PETRIHO SÍTÍ

Formálně lze pojem jazyka Petriho sítě zavést s využitím zobecněné přechodové funkce P. sítě:

Definice 1

Nechť $N = (P, T, W, K, M_0)$ je Petriho síť a $[M_0\rangle$ její množina dosažitelných značení. <u>Přechodovou funkcí P. sítě</u> nazveme funkci δ:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta : [M_0\rangle \times T \to [M_0\rangle, \text{ pro kterou} \\ \forall t \in T\ \forall M, M' \in [M_0\rangle : \delta(M,t) = M' \overset{def.}{\iff} M[t\rangle M' \end{array}}$$

δ může být zobecněna na posloupnosti přechodů:

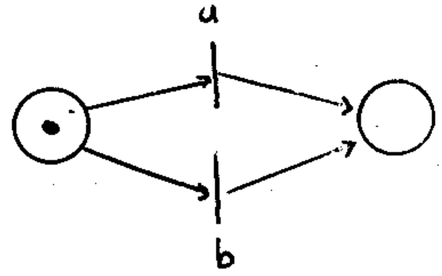
takto:

$$\boxed{\begin{array}{l} \delta : [M_0\rangle \times T^* \to [M_0\rangle \\ \delta(M, t\tau) = \delta(\delta(M,t), \tau), \ \tau \in T^*, t \in T \\ \delta(M, e) = M, \ e \text{ je prázdný řetězec} \end{array}}$$

Posloupnost (řetězec) $\tau \in T^*$ nazveme <u>výpočetní posloupností</u> sítě N, je-li definována hodnota $\delta(M_0, \tau)$.

Množina všech výpočetních posloupností Petriho sítě N je základem pro definici <u>jazyka Petriho sítě</u>.

Příklad 1

N: 

$L(N) = \{e, a, b\}$

Definice jazyků Petriho sítí

Vedle množiny přechodů T zavedeme abecedu Σ Petriho sítě a ohodnocení (labeling) přechodů sítě λ

$$\lambda : T \to \Sigma \cup \{e\}$$

Příslušnou Petriho síť nazveme ohodnocenou Petriho sítí

Podle tvaru λ rozlišujeme 3 typy ohodnocených P. sítí:

(1) Nejomezenější typ je dán injektivním ohodnocením λ:

$$\lambda : T \to \Sigma \; ; \; \lambda(t) = \lambda(t') \Rightarrow t = t' \quad \forall t, t' \in T$$

Tyto sítě jsou označované jako free-labeled nets

(2) Druhý typ nepřipouští ohodnocení prázdným symbolem e:

$$\lambda : T \to \Sigma$$

(3) Třetí typ připouští libovolné ohodnocení:

$$\lambda : T \to \Sigma \cup \{e\}$$

Počáteční stav a počáteční místo P. sítě

Dosud jsme za počáteční stav P. sítě považovali libovolné počáteční značení M_0. Pro operace nad jazyky P. sítí je vhodné, aby počáteční stav byl spojen se značkou v jediném speciálním místě – počátečním (startovacím) místě p_s:

$$M_0(p_s) = 1 \;\wedge\; \forall p \in P \setminus \{p_s\} : M_0(p) = 0$$

Ukážeme, že tato modifikace fakticky neomezuje výběr počátečního stavu P. sítě.

Uvažujme lib. Petriho síť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$.
Ekvivalentní síť $N' = (P', T', F', W', K', M_0')$ s počátečním místem p_s vytvoříme takto:

(1) $P' = P \cup \{p_s\}$

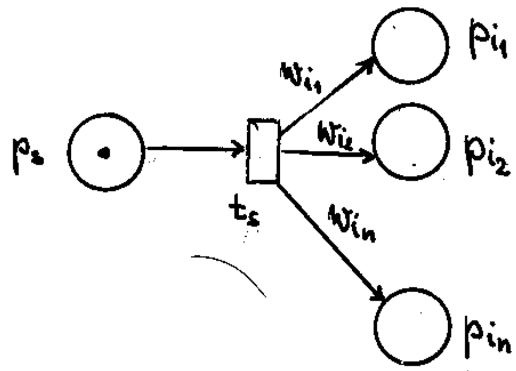
(2) $T' = T \cup \{t_s\}$

(3) $F' = F \cup F_{t_s}$, kde $F_{t_s} = \{\langle p_s, t_s\rangle\} \cup \{\langle t_s, p\rangle \mid M_0(p) \neq 0\}$

(4) W' je rozšíření funkce W:
$W'(p_s, t_s) = 1 \wedge W'(t_s, p) = k \Leftrightarrow M_0(p) = k$

(5) K' je rozšíření K: $K'(p_s) = 1$

(6) $M_0' : P \cup \{p_s\} \to \mathbb{N}$, $M_0'(p_s) = 1 \wedge \forall p \in P : M_0'(p) = 0$



Při ohodnocení $\lambda'(t_s) = \varepsilon$ a $\forall t \in T : \lambda'(t) = \lambda(t)$ jsou jazyky sítí N a N' shodné

Koncové stavy a typy jazyků Petriho sítě.

Byly definovány 4 typy jazyků Petriho sítí:

$$\boxed{L, G, T, P}$$

v závislosti na konceptu koncového stavu sítě.

Definica 2

Nechť N je Petriho síť s počátečním značením M_0 a s ohodnocením přechodů $\lambda : T \to \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, s přechodovou funkcí

$$\delta : [M_0\rangle \times T^* \to [M_0\rangle$$

a s množinou koncových stavů (značení) $Q_f \subseteq [M_0\rangle$.

Jazyk $L(N) \subseteq \Sigma^*$ definovaný jako

$$\boxed{L(N) = \{\lambda(\alpha) \mid \alpha \in T^* \wedge \delta(M_0, \alpha) \in Q_f\}}$$

se nazývá jazykem typu **L**.

Tato definice není zcela v souladu se základní filosofií P. sítí: je-li $\delta(M, t)$ definována pro M, pak je také definována $\delta(M', t)$ pro vš. $M' \geq M$

Definice 3

Nechť N je Petriho síť splňující předpoklady předchozí definice. Jazyk $L(N)$ definovaný jako

$$\boxed{L(N) = \{\lambda(\alpha) \mid \alpha \in T^* \wedge \exists M_f \in Q_f : \delta(M_0, \alpha) \geq M_f\}}$$

se nazývá jazykem typu **G**.

Definice 4

Nechť N je P. síť s počátečním značením M_0, s ohodnocením λ a přechodovou funkcí δ.

(1) Jazyk L(N) definovaný jako

$$\boxed{\begin{aligned} L(N) = \{ \lambda(\alpha) \mid \alpha \in T^* \wedge \delta(M_0,\alpha) \in [M_0> \wedge \\ \wedge\ \forall t \in T\ \ \delta(\delta(M_0,\alpha),t) = \underline{\text{nedef.}} \} \end{aligned}}$$

se nazývá jazykem typu **T**.

(2) Jazyk L(N) definovaný jako:

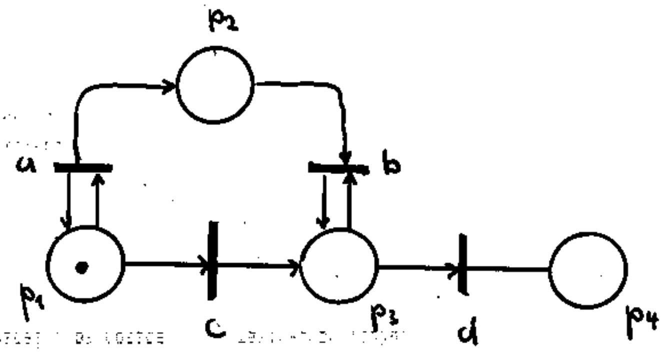
$$L(N) = \{ \lambda(\alpha) \mid \alpha \in T^* \wedge \delta(M,\alpha) \in [M_0> \}$$

se nazývá jazykem typu **P**.

Uvažujme-li nyní 3 typy ohodnocení přechodů, pak existuje 12 typů jazyků Petriho sítí. Některé vzáj. vztahy ukazuje obrázek (graf): $A \longrightarrow B$ značí $B \subseteq A$ ($A \supseteq B$); $\mathcal{L}^e$, resp $\mathcal{L}$, resp $\mathcal{L}^f$ značí třídu jazyků s ohodnocením $\lambda: T \to \Sigma \cup \{e\}$, resp. $T \to \Sigma$, resp. $T \to \Sigma$ a λ je injektivní.

$$\begin{tikzcd}
T^e \arrow[r] \arrow[d, bend right] & T \arrow[r] & T^f \\
L^e \arrow[r] \arrow[u, bend right] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & L^f \\
G^e \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & G^f \arrow[d] \\
P^e \arrow[r] & P \arrow[r] & P^f
\end{tikzcd}$$

Příklad – ilustrace různých typů jazyků P. sítí



Položme $Q_f = \{(0,0,1,0)\}$, $M_0 = (1,0,0,0)$

L-typ:

$$L = \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}$$

G-typ:

$$L = \{a^m c b^n \mid m \geq n \geq 0\}$$

T-typ:

$$L = \{a^m c b^n d \mid m \geq n \geq 0\}$$

P-typ:

$$L = \{a^m \mid m \geq 0\} \cup \{a^m c b^n \mid m \geq n \geq 0\} \cup \{a^m c b^n d \mid m \geq n \geq 0\}$$

Vlastnosti jazyků Petriho sítí typu L

Standardní tvar Petriho sítě

Definice 5 Petriho síť $N = (P, T, F, W, M_0, p_s, \Sigma, \lambda, P_f)$ nazveme ohodnocenou Petriho sítí ve standardním tvaru, jestliže

(1) Složky P, T, F, W, M_0 mají dosud užívaný význam

(2) $p_s \in P$ je počáteční místo takové, že
  (a) $M_0(p_s) = 1 \;\wedge\; \forall p \in P \setminus \{p_s\} : M_0(p) = 0$
  (b) $\forall t \in T : \langle t, p_s \rangle \notin F$

(3) $\lambda : T \to \Sigma$ je ohodnocení přechodů

(4) $P_f \subseteq P$ je množina koncových míst
  (a) $P_f = \begin{cases} \{p_f, p_s\} & \text{jestliže } \varepsilon \in L(N) \\ \{p_f\} & \text{-"-} \quad \varepsilon \notin L(N) \end{cases}$

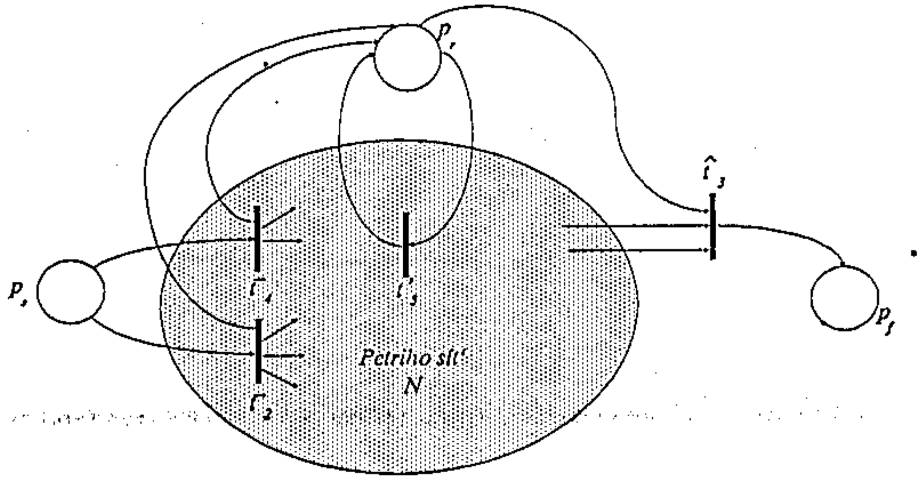
  (b) $\forall t \in T : \langle p_f, t \rangle \notin F$

  (c) Je-li $M(p_f) > 0$ pro nějaké $M \in [M_0\rangle$, pak $\delta(M, t)$ je nedefinována pro všechna $t \in T$

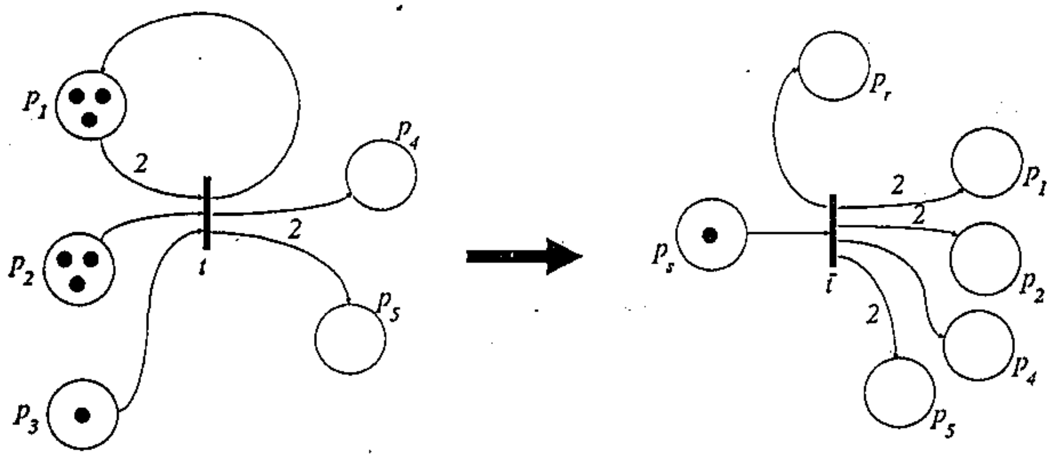
Věta 1

Ke každé ohodnocené Petriho síti N (typu L) existuje ekvivalentní ohodnocená P. síť N' ve standardním tvaru taková, že $L(N) = L(N')$.

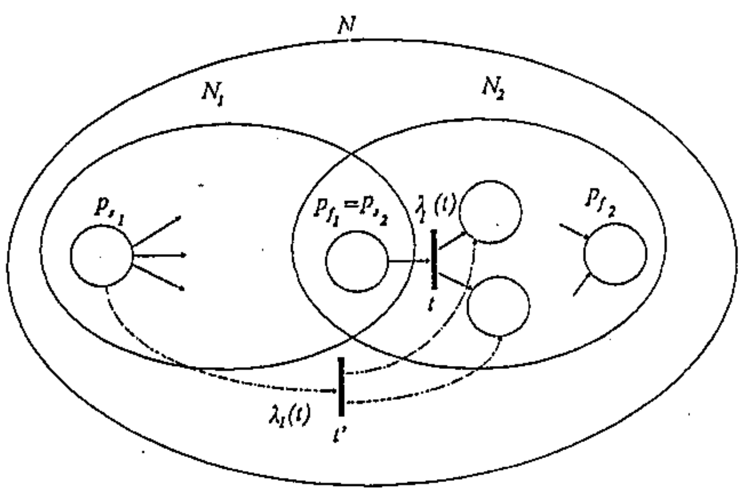
Důkaz Viz skripta.



!. Konstrukce Petriho sítě ve standardním tvaru



Konstrukce Petriho sítě ve standardním tvaru - pokračování



Konkatenace Petriho sítí.

Uzávěrové vlastnosti

Definice 6

Nechť $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ jsou dva řetězce nad abecedou Σ a nechť $a, b \in \Sigma$. Paralelní kompozici $\|$ (spojení) dvou řetězců definujeme rekurentně:

$$ax_1 \| bx_2 = a(x_1 \| bx_2) + b(ax_1 \| x_2)$$
$$a \| e = e \| a = a$$

Paralelní kompozice $L_1 \| L_2$ jazyků L_1 a L_2 je definována předpisem

$$L_1 \| L_2 = \{ x \| y : x \in L_1 \wedge y \in L_2 \}$$

Příklad Je-li $L_1 = \{ab\}$ a $L_2 = \{c\}$, pak

$$L_1 \| L_2 = \{abc, acb, cab\}$$

Věta 2

Jazyky Petriho sítí (typu L) jsou uzavřeny vzhledem k

(1) sjednocení

(2) konkatenaci

(3) průniku

(4) paralelní kompozici

(5) reverzi jazyka

Důkaz viz skripta (konstrukce přísl. P. sítí ve st. tvaru)

Věta 3

Jazyky Petriho sítí nejsou uzavřeny vzhledem operaci iterace.

Důležitou operací, popisující princip abstrakce (zjemnění) je operace substituce. Můžeme rozlišit 3 typy substituce

(1) obecná substituce (L_a je lib. formální jazyk)
(2) konečná substituce (L_a je konečný jazyk)
(3) homomorfismus (L_a je tvořen jediným řetězcem)

Věta 4

Jazyky Petriho sítí nejsou uzavřeny vzhledem k obecné substituci.

Důkaz

Uvažujme jazyk

$L_c = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ substituovaný do jazyka

$L = \{c^i \mid i \geq 1\}$

Výsledkem je jazyk

$$L' = \{a^{m_1} b^{m_1} \dots a^{m_k} b^{m_k} \mid m_i \geq 1, k \geq 1\} = L_c^+ ,$$

což podle věty 3 není jazyk P. sítí. L_c i L však jsou jazyky P. sítí (viz dále).

Věta 5

Je-li L_1 jazyk P. sítí a L_2 jazyk regulární, pak jazyk L, který vznikne substitucí jazyka L_2 do L je jazykem P. sítí.

Vztah jazyků Petriho sítí k Chomského hierarchii jazyků.

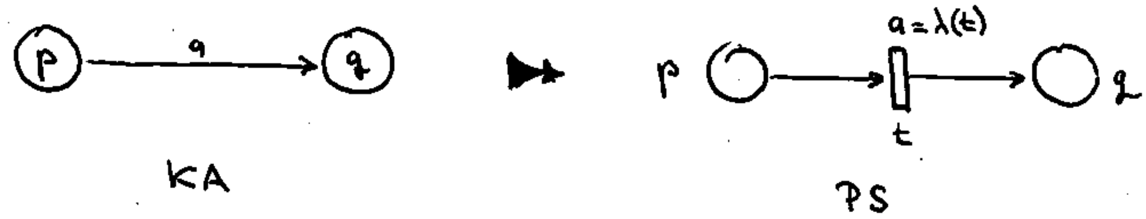
Věta 5

Každý regulární jazyk je jazykem Petriho sítí

Důkaz.

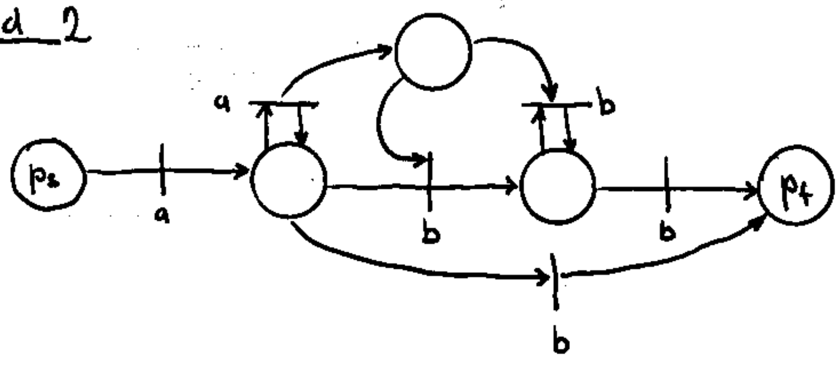
Je třeba ukázat, že ke každému kon. automatu M lze sestrojit ohodn. Petriho síť N tak, že $L(M) = L(N)$.

Princip konstrukce:



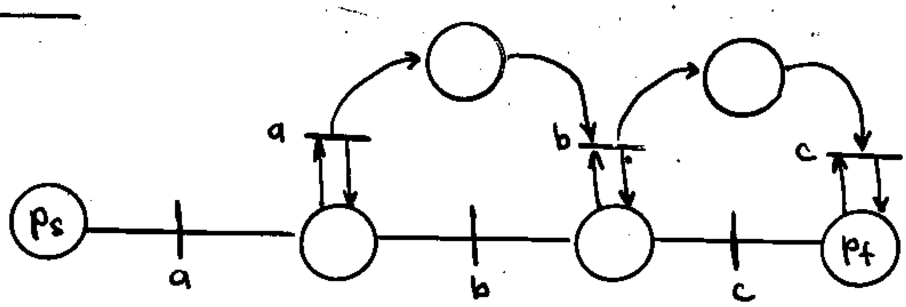
Studujme nyní vztah jazyků Petriho sítí k vyšším třídám Ch. hierarchie

Příklad 2



$$L(N) = \{ a^n b^n \mid n \geq 1 \}$$

Příklad 3



$$L(N) = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$$

Lemma 1

Jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \Sigma^*\}$ není jazykem Petriho sítí.

Důkaz

Nejprve odvodíme nutnou podmínku pro mohutnost st. prostoru P. sítě generující jazyk L.

Předpokl., že existuje síť N taková, že $L = L(N)$. Nechť $|\Sigma| = k$, $k > 1$ a uvažujme řetězce $xx^R \in L$, $|x| = r$. Protože existuje k^r možných řetězců x, musí st. prostor P. sítě obsahovat alespoň k^r různých stavů sloužících k jednozn. zapamatování struktury x. Skutečně, pokud by pro x_1, x_2 platilo $\delta(M_0, x_1) = \delta(M_0, x_2)$ pro $x_1 \neq x_2$, pak $\delta(M_0, x_1 x_2^R) = \delta(\delta(M_0, x_1), x_2^R) = \delta(\delta(M_0, x_2) x_2^R = \delta(M_0, x_2 x_2^R) \in Q_f$ a tedy $x_1 x_2^R \in L$ pro $x_1 \neq x_2$, což je spor s definicí L.

Nyní ukážeme, že podmínka, aby provedení posl. délky r aktualizovalo lib. ze stavů množiny mohutnosti k^r, je nesplnitelná. Uvažujme takovou posloupnost

$$M_0 [t_1 > M_1 \ldots [t_r > M_r$$

a předpokládejme, že množina T má mohutnost $|T| = m$.

Značení M_r můžeme vyjádřit ve tvaru :

$$M_r = M_0 + \underline{N} \cdot u$$

kde $u : T \to N$ je vektor se složkami $u(t) = |\{i \mid t_i = t \wedge 1 \le i \le r\}|$

Zřejmě platí $\sum_{t \in T} u(t) = r$. V nejlepším případě každý vektor splňující tuto podmínku generuje různý stav M_r.

Kolik lze sestrojit takových vektorů (ekvivalentní počtu rozkladů čísla r na m nezáporných celočíselných členů)?

Z kombinatoriky je tento počet znám a roven číslu

$$\binom{r+m-1}{m-1}$$

Avšak

$$\binom{r+m-1}{m-1} = \frac{(r+m-1)\dots(r+1)}{(m+1)!} < (r+m)^m$$

Pro dostatečně velké r platí $(r+m)^m < k^r$, což je spor s požadovanou velikostí stav. prostoru.

Závěr

Nekompatibilita stav. prostorů P. sítí a zás. automatů.

P. sítě – kombinatoricky rostoucí poč. dostup. stavů

Z. automaty – exponenciálně — " —

Na druhé straně

„odlišnosti v řízení"

ZA – vrchol zásobníku

PS – lib. čítač (místo)

Definice 6

Bezkont. jazyk L se nazývá <u>omezeným bezkont. jazykem</u> (<u>OBJ</u>) jestliže existují řetězce $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \Sigma^*$ takové, že

$$L \subseteq w_1^* w_2^* \ldots w_n^*$$

Pozn.: Jazyk $(a+b)^+$

Věta 6

Třída omezených bezk. jazyků je nejmenší třída jazyků splňující podmínky:

(1) Je-li B konečná podmnožina, $B \subseteq \Sigma^*$, pak B je OBJ

(2) Jsou-li B_1 a B_2 OBJ, pak $B_1 \cup B_2$, $B_1 . B_2$ jsou OBJ

(3) Je-li B OBJ a $x, y \in \Sigma^*$, pak $\{x^i B y^i \mid i \geq 0\}$ je OBJ

Věta 7

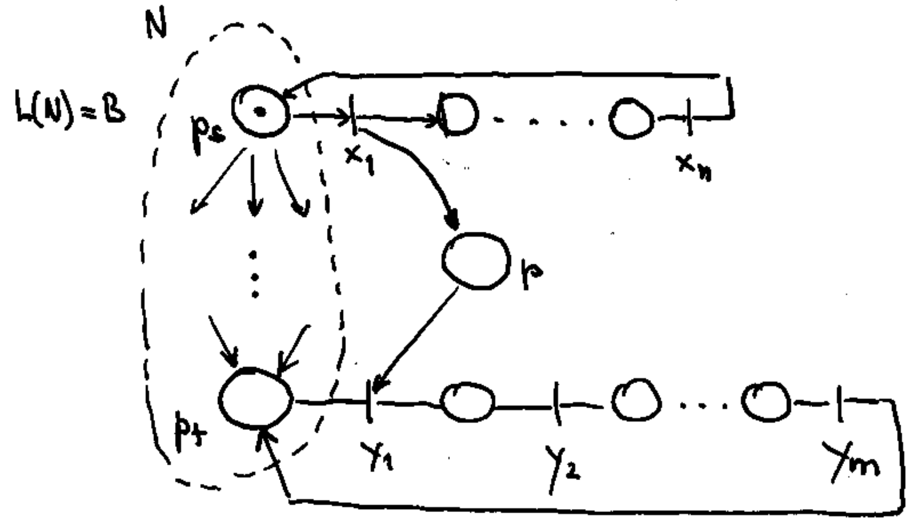
Každý OBJ je jazykem generovaným Petriho sítí

Důkaz

S využitím předchozí věty: ad 1, 2 platí

ad (3)

Nechť $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, $y = y_1 y_2 \ldots y_m$



Věta 8

Všechny jazyky Petriho sítí jsou kontextové jazyky.

Důkaz.

$L \subseteq \mathcal{L}_1 \wedge \cancel{\mathcal{L}_1 \subseteq L}$

Ukažme, že jazyk L Petriho sítě N může být přijímán lin. omezeným Turingovým strojem.

Nechť páska T. stroje uchovává značení každého místa sítě N

Simulace přechodu ?

Kvantifikujme využívanou část pásky celkovým součtem S všech značek všech míst a vyšetřeme, jak se tento součet mění v závislosti na délce vst. řetězce.

Nechť vst. řetězci délky $k \geq 1$ odpovídá vyp. posloupnost

$t_1 t_2 \dots t_k$

Označme proměnnou d_t počet značek, kterým přispívá přechod t k celkovému počtu značek sítě. Platí

$$d_t = \sum_{p \in t^\bullet} W(t,p) - \sum_{p \in {}^\bullet t} W(p,t)$$

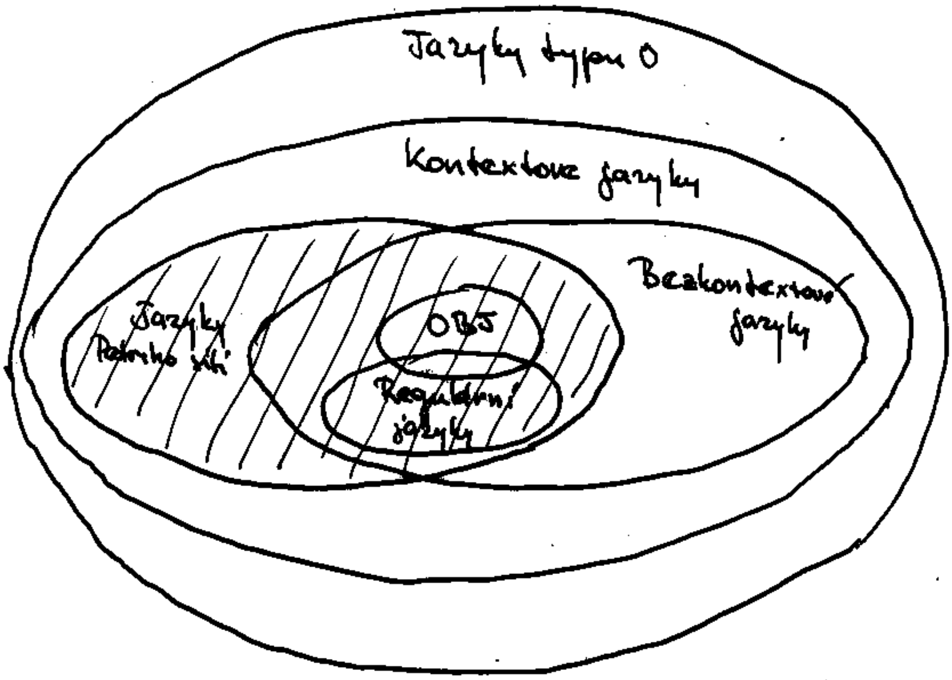
Pak veličinu S po provedení posloupnosti $t_1 \dots t_k$ lze vyjádřit ve tvaru $S = 1 + \sum_{i=1}^{k} d_{t_i}$

Z def. P. sítě plyne existence $\max_{t \in T} d_t = m$ a hodnoty S lze ohraničit v závislosti na délce k vstupního řetězce funkcí

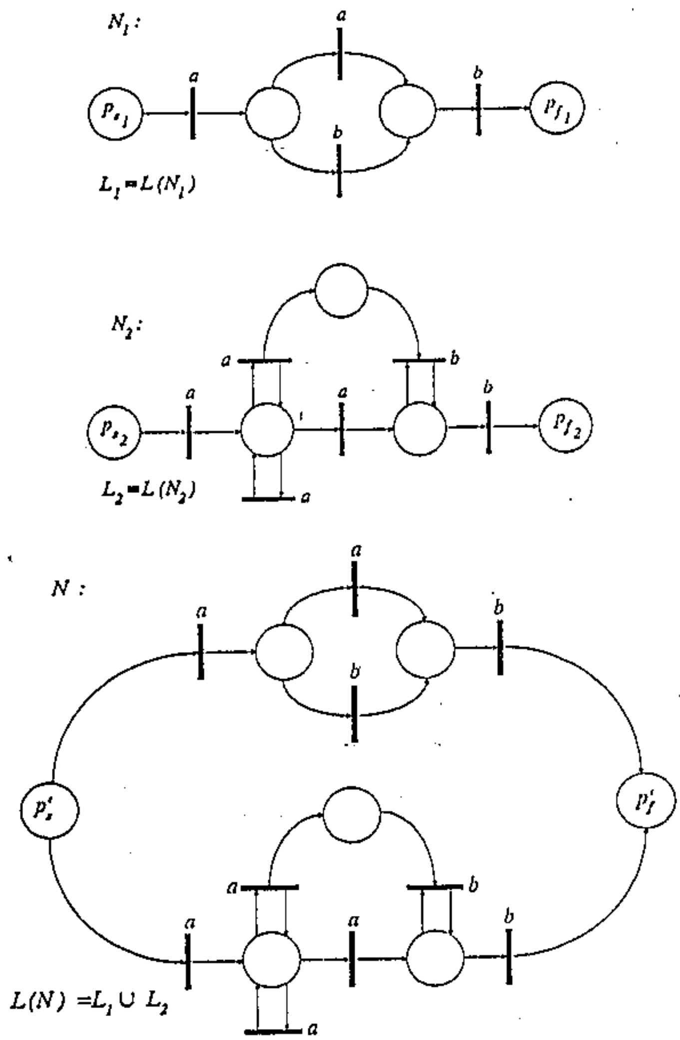
$$S(k) \leq 1 + k \cdot m \, ,$$

což je lin. funkce a přísl. T. stroj je tedy lineárně omezený.

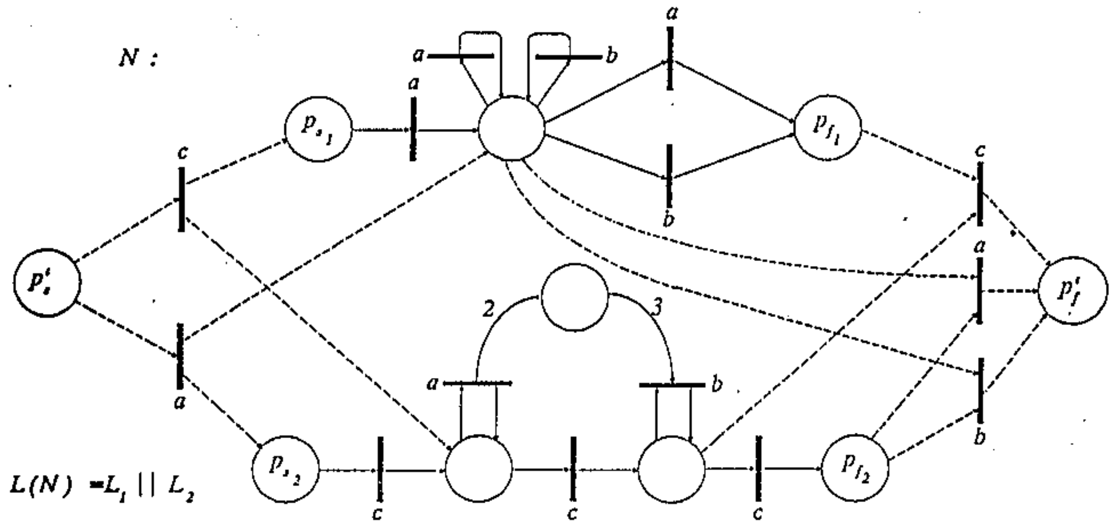
Graficky lze tedy pozici jazyků P. sítí v CH. hierarchii vyznačit takto:



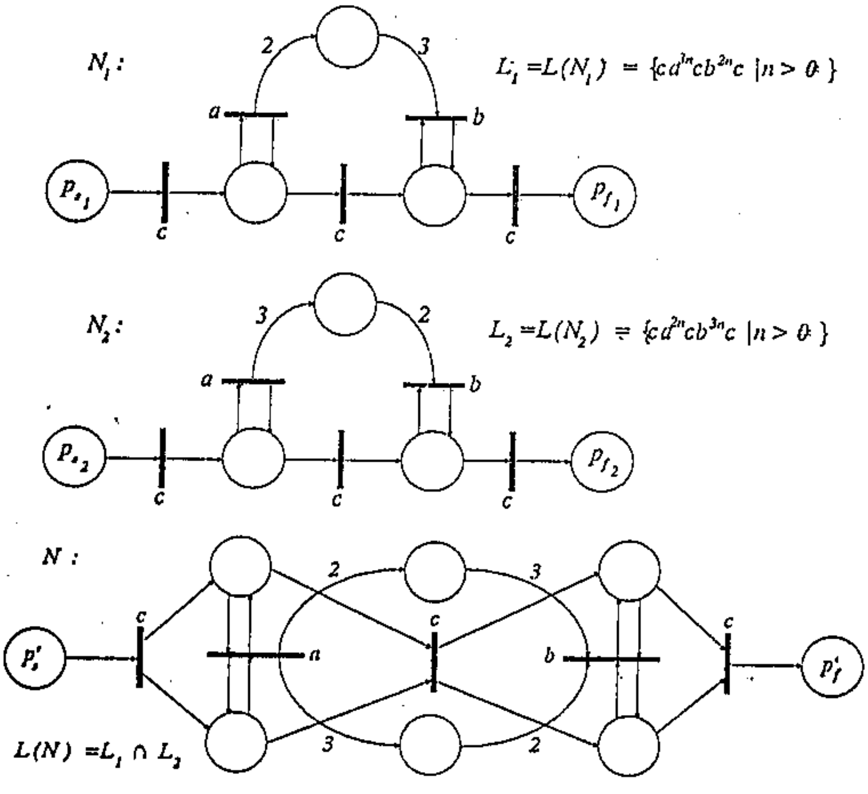
Otázka: Čím lze rozšířit modelovací schopnost P. sítí?



Ilustrace sjednocení Petriho sítí



Ilustrace paralelní kompozice dvou Petriho sítí



Ilustrace průniku Petriho sítí