2k 26.5.03

TEORETICKÁ INFORMATIKA 2

Teorie Petriho sítí

Milan Češka

Doporučená literatura :

1. Peterson J.: Petri Net Theory and the Modelling of System Prentice Hall, 1981

2. Reisig W.: Petri Nets - an Introduction, Springer-Verlag, 1985

3. Reisig W.: A primer in Petri net design, Springer-Verlag, 1992

4. Češka M. a kol.: Vyčíslitelnost a složitost, skriptum VUT, 1992 (kap. 4 - Petriho sítě)

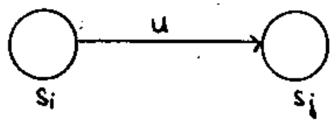
5. Češka M.: Petriho sítě, Akademické nakladatelství CERM, Brno 1994

2

1. Základní koncepty Petriho sítí

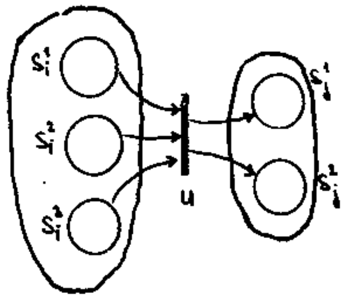
(a) modelování událostí

V konečném automatu:



$s_j \in \delta(s_i, u)$

V Petriho síti:



$\{s_i^1, s_i^2, s_i^3\} \approx s_i$

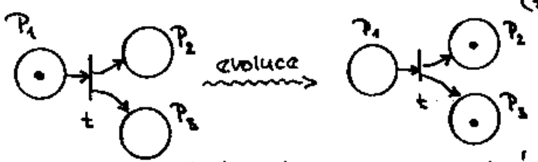
$\{s_j^1, s_j^2\} \approx s_j$

Složky Petriho sítě:

- místa (places) – kolečka
- přechody (transitions) – úsečky
- hrany

} statická reprezentace systému

- značky (tokens) – černé tečky — reprezentace dynamiky (změn)



před provedením přechodu t — po provedení přechodu t

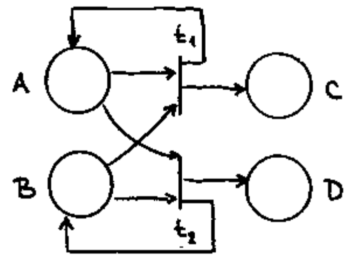
3

Příklad 1.

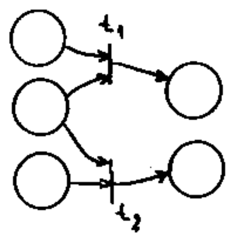
(b) modelování podmíněnosti

precondition : $A \wedge B$

postcondition : $(A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge D)$



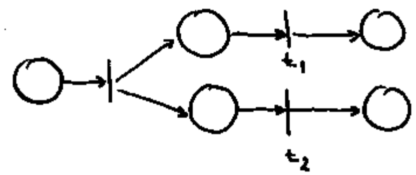
(c) modelování vzájemné výlučnosti (mutual exclusion)



t_1, t_2 jsou vz. vyloučeny

(konfliktní přechody)

(c) modelování paralelnosti (simultánnosti)

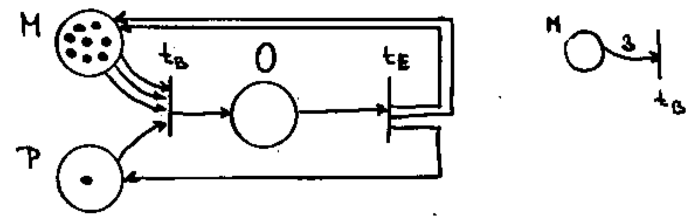


t_1, t_2 jsou simultánní

(nezáv. přechody)

4

(d) modelování požadavků na zdroje



Interpretace míst a přechodů

M - počet volných pam. bloků

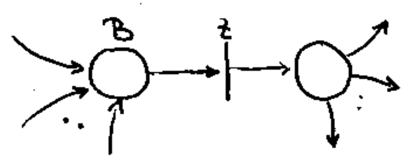
P - procesor je volný

O - operace probíhá

t_B - začátek operace

t_E - konec operace

Pozn. Problém vyr. pamětí (bufferů), front



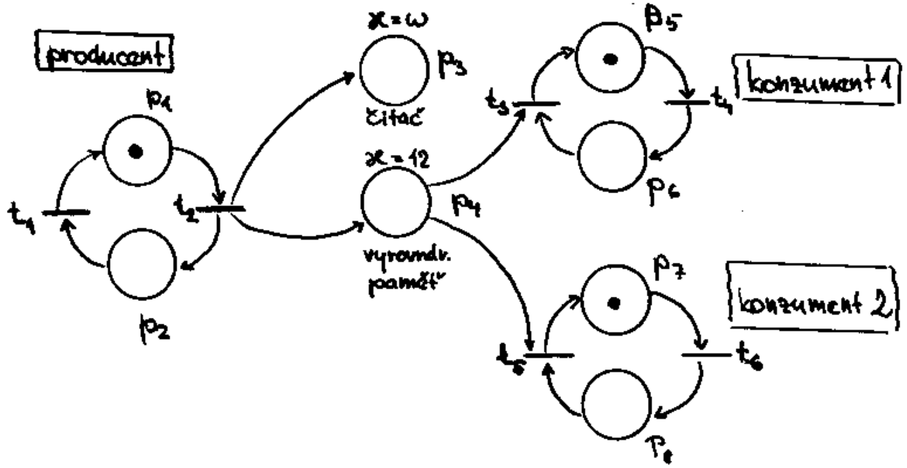
B - buffer

z - zpracování položky

Nemůže dojít k přetečení B (bufferu, fronty) ?

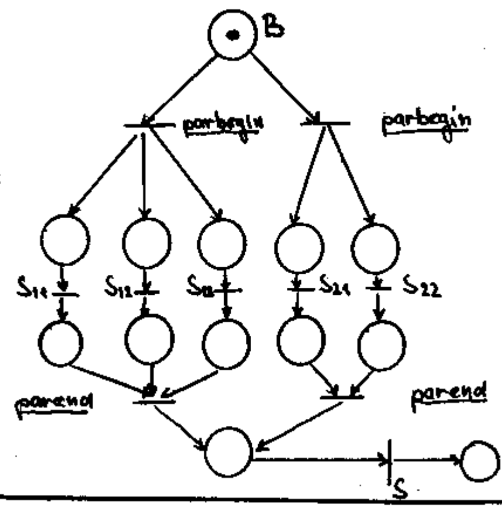
5

Příklad 2 (producent - konzument)



Příklad 3 (model úseku par. programu)

if B then parbegin S_{11};
S_{12};
S_{13}
parend
else parbegin S_{21};
S_{22}
parend ;
S ;



6

2. Základní matematické definice

Definice 2.1

Trojici $N = (P, T, F)$ nazveme sítí (net), jestliže

(1) P a T jsou disjunktní množiny

(2) F je binární relace:
$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$.

P nazýváme množinou míst (Places)

T množinou přechodů (Transitions)

F tokovou relací (Flow relation)

Grafem sítě nazveme grafovou reprezentaci relace F.
Graf sítě je bipartitní orientovaný graf s množinou $P \cup T$ vrcholů.

Definice 2

Nechť $N = (P, T, F)$ je síť.

(1) Pro všechny prvky $x \in P \cup T$

$^\bullet x = \{y \mid yFx\}$ se nazývá vstupní množinou (preset) prvku x

$x^\bullet = \{y \mid xFy\}$ se nazývá výstupní množinou (post set) prvku x

Podobně pro podmnožiny prvků: Nechť $X \subseteq P \cup T$, pak

$^\bullet X = \bigcup_{x \in X} {^\bullet x}$ a $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$

Zřejmě platí: $\boxed{\forall x, y \in P \cup T : (x \in {^\bullet y} \Leftrightarrow y \in x^\bullet)}$

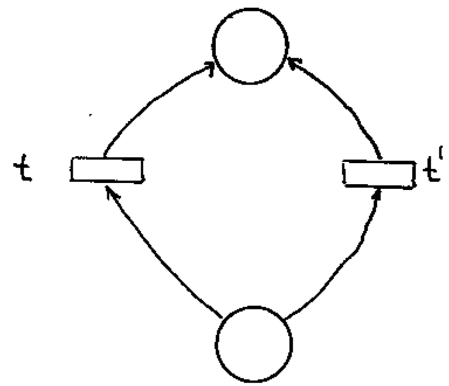
1. Základní pojmy

Definice 2a (jednoduchá síť)

Nechť $N = (P, T, F)$ je síť. N se nazývá jednoduchou sítí (simple net), jestliže

$$\boxed{\forall x, y \in (P \cup T) : ({^\bullet x} = {^\bullet y} \wedge x^\bullet = y^\bullet) \Rightarrow x = y}$$

Příklad (nejednoduché sítě)



Definice 2b.

Nechť $N_1 = (P_1, T_1, F_1)$, $N_2 = (P_2, T_2, F_2)$ jsou sítě.
Existuje-li bijekce $\beta : (P_1 \cup T_1) \to (P_2 \cup T_2)$ taková, že

(1) $x \in P_1 \Leftrightarrow \beta(x) \in P_2$

(2) $(x, y) \in F_1 \Leftrightarrow (\beta(x), \beta(y)) \in F_2$

pak N_1 a N_2 nazýváme izomorfní.

(2) Uspořádaná dvojice $\langle p,t \rangle \in P \times T$ se nazývá vlastní cyklus, pokud $pFt \wedge tFp$. Síť, která neobsahuje vlastní cyklus se nazývá čistou sítí (pure net).

(3) Prvek $x \in P \cup T$ se nazývá izolovaný, jestliže ${}^\bullet x \cup x^\bullet = \emptyset$

Definice 3

6-tici $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ nazýváme P/T Petriho sítí (Place / Transition Petri Net), jestliže

(1) (P, T, F) je konečná síť

(2) $W: F \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je ohodnocení hran grafu určující kladnou váhu každé hrany sítě

(3) $K: P \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ je zobrazení určující kapacitu každého místa

(4) $M_0: P \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ je počáteční značení míst Petriho sítě takové, že $M_0(p) \leq K(p)$ pro vš. $p \in P$

Pozn.:

(1) $\mathbb{N}$ je množina $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

(2) ω značí supremum množiny $\mathbb{N}$ s vlastnostmi

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ je $n < \omega$

(b) $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ je $m + \omega = \omega + m = \omega$

$\omega - m = \omega$

(3) Petriho sítí budeme dále rozumět P/T Petriho síť

Definice 4 (Evoluční pravidla Petriho sítě)

Nechť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ je Petriho síť.

(1) Zobrazení $M: P \to \mathbb{N} \cup \{\omega\}$ se nazývá značení P. sítě N (marking), jestliže $\forall p \in P: M(p) \leq K(p)$

(2) Nechť M je značení Petriho sítě N. Přechod $t \in T$ je proveditelný (enabled) při značení M, (stručněji M-proveditelný), jestliže

$$\boxed{\begin{array}{ll} \forall p \in {}^\bullet t: & M(p) \geq W(p,t) \\ \forall p \in t^\bullet: & M(p) \leq K(p) - W(t,p) \end{array}}$$

(3) Je-li $t \in T$ M-proveditelný, pak jeho provedením získáme následné značení M' ke značení M, které je definováno takto:

$\forall p \in P$:

$$\boxed{M'(p) = \begin{cases} M(p) - W(p,t), & \text{je-li } p \in {}^\bullet t \setminus t^\bullet \\ M(p) + W(t,p), & \text{je-li } p \in t^\bullet \setminus {}^\bullet t \\ M(p) - W(p,t) + W(t,p), & \text{je-li } p \in {}^\bullet t \cap t^\bullet \\ M(p) & \text{jinak} \end{cases}}$$

Provedení přechodu t (transition firing) ze značení M do značení M' zapisujeme symbolicky:

$$\boxed{M\,[t\rangle\, M'}$$

(4) Označme $[M\rangle$ nejmenší množinu různých značení Petriho sítě N, pro kterou platí

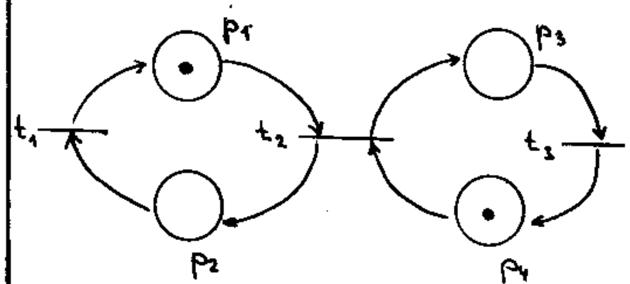
(a) $M \in [M\rangle$

(b) je-li $M_1 \in [M\rangle$ a pro nějaké $t \in T$ platí $M_1[t\rangle M_2$, pak $M_2 \in [M\rangle$.

Množina $[M\rangle$ se nazývá <u>množinou dosažitelných značení</u> (reachability set) <u>ze značení M</u>. Množina $[M_0\rangle$ se nazývá <u>množinou dosažitelných značení sítě</u> N.

<u>Příklad 4</u>

Uvažujme P. síť v grafové reprezentaci:



$[M_0\rangle = \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$, kde

$M_0 = (1,0,0,1)$
$M_1 = (0,1,1,0)$
$M_2 = (1,0,1,0)$
$M_3 = (0,1,0,1)$

3. Stavový prostor a přechodová funkce Petriho sítě

Množina $[M_0\rangle$ reprezentuje stavový prostor P. sítě. Mohou nastat 2 případy:

$[M_0\rangle$ < je konečná množina / je spočetná nekonečná množina

<u>Definice 5</u>

Nechť $N = (P,T,F,W,K,M_0)$ je Petriho síť a $[M_0\rangle$ její množina dosažitelných značení. <u>Přechodovou funkcí Petriho sítě</u> N nazveme funkci δ:

$$\boxed{\begin{gathered}\delta: [M_0\rangle \times T \to [M_0\rangle, \text{ pro kterou} \\ \forall t \in T: \forall M, M' \in [M_0\rangle : \delta(M,t) = M' \overset{def.}{\Leftrightarrow} M[t\rangle M'\end{gathered}}$$

Přechodová funkce δ může být zobecněna na posl. přechodů:

$$\delta: [M_0\rangle \times T^* \to [M_0\rangle$$

takto

$$\boxed{\begin{gathered}\delta(M,t\tau) = \delta(\delta(M,t),\tau), \ \tau \in T^* \\ \delta(M,e) = M\end{gathered}}$$

Řetězec $\tau \in T^+$ nazveme <u>výpočetní posloupností</u> Petriho sítě, je-li $\delta(M_0,\tau)$ definována (+ případné další podmínky). <u>Jazyk Petriho sítě</u> = mn. výp. posloupností

4. Komplementace Petriho sítě

Definice 6

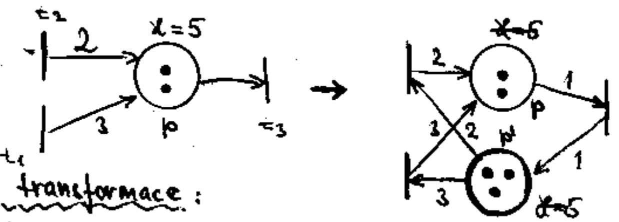
Petriho síť $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ se nazývá <u>bezkontaktní</u> (contact free), jestliže pro všechna $M \in [M_0\rangle$ a všechny $t \in T$ platí:

jestliže $\forall p \in {}^{\bullet}t : M(p) \geq W(p,t)$ (t.j. t je M-proveditelný)
pak $\forall p \in t^{\bullet} : M(p) \leq K(p) - W(t,p)$

Věta 1

Každá P. síť může být převedena na bezkontaktní P. síť.

Důkaz: PS $N = (P, T, F, W, K, M_0)$ převedeme na bezkontaktní PS $N' = (P', T, F', K', W', M_0')$ transformací kdy přidáme „komplementární místa" a hrany např. takto:



Popis transformace:

(1) $\forall p \in P$, pro která $K(p) \neq \omega$ vytvoř $p' \in P'$

(2) $\forall \langle t,p\rangle, \langle p,t\rangle \in F$ vytvoř $\langle p',t\rangle, \langle t,p'\rangle \in F'$

(3) Polož $M_0(p') = K(p) - M_0(p)$

(4) Polož $W'(p',t) = W(t,p) \wedge W'(t,p') = W(p,t)$

Zřejmě platí: $\forall M \in [M_0\rangle : M(p) + M(p') = K(p)$

5. Maticová reprezentace Petriho sítě

Definice:

Nechť $N = (P, T, F, W, M_0)$ je Petriho síť. <u>Tokovou</u> nebo <u>incidenční matici</u> Petriho sítě N nazveme matici

$$\underline{F} : P \times T \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

jejíž prvek $F(p,t)$ je pro vš $p \in P$ a $t \in T$ definován takto:

$$\boxed{F(p,t) = \langle \overline{W}(p,t), \overline{W}(t,p)\rangle \text{ kde } \overline{W}(x,y) = \begin{cases} W(x,y) & \text{pro } \langle x,y\rangle \in F \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}}$$

<u>Maticí změn Petriho sítě</u> nazveme „složenou" matici

$$\underline{N} : P \times T \to \mathbb{Z}$$

jejíž prvek $N(p,t)$ je definován takto:

$$\boxed{\underline{N}(p,t) = \overline{W}(t,p) - \overline{W}(p,t)}$$

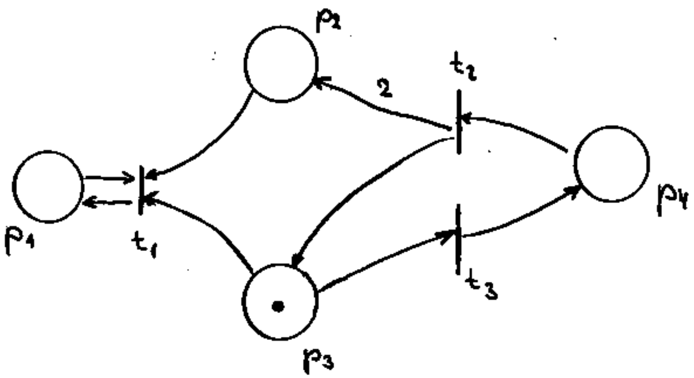
Dále označme: $\boxed{\forall t \in T : \underline{t} : P \to \mathbb{Z},\ \underline{t}(p) = \underline{N}(p,t)}$

Pozn.: angl. terminologie: <u>flow matrix</u>, <u>change matrix</u>

Matice $\underline{N}$ se často jednoduše nazývá <u>maticí Petriho sítě</u>

Příklad

Uvažujme následující Petriho síť:



Toková matice

$$\underline{F} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} (1,1) & (0,0) & (0,0) \\ (1,0) & (0,2) & (0,0) \\ (1,0) & (0,1) & (1,0) \\ (0,0) & (1,0) & (0,1) \end{array}\right] \end{array}$$

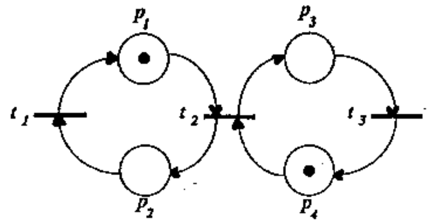
Matice změn

$$\underline{N} = \begin{array}{c} \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

Např.: $\underline{t}_1 = (0, -1, -1, 0)$

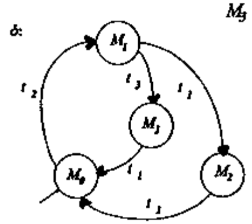
Příklad 4.7.

Na obr. 4.12. je zobrazena Petriho síť N a její přechodová funkce δ ve tvaru diagramů přechodů.



$[M_0> = \{M_0, M_1, M_2, M_3\}$, kde $M_0 = (1,0,0,1)$, $M_1 = (0,1,1,0)$, $M_2 = (1,0,1,0)$, $M_3 = (0,1,0,1)$

δ:



Obr. 4.12. Petriho síť a její přechodová funkce

Množina výpočetních posloupností Petriho sítě N může být charakterizována regulárním výrazem

$$(t_2(e + t_3 t_1 (t_2 t_3 t_1)^*) t_1 t_3)$$

Každý neprázdný prefix řetězce specifikovaného tímto výrazem tvoří výpočetní posloupnost.

■

Dosud jsme nediskutovali jeden z důležitých rysů Petriho sítě, její *nedeterminismus*. Objevuje se při provádění přechodů Petriho sítě tehdy, jestliže pro jisté značení $M \in [M_0\rangle$ existují alespoň dva různé přechody $t_1, t_2 \in T$, které jsou M-proveditelné. Pak mohou nastat dvě odlišné situace

(1) Existují výpočetní posloupnosti $\alpha t_1 t_2 \beta$ a $\alpha t_2 t_1 \beta$ pro jisté $\alpha, \beta \in T^*$. V tomto případě přechody t_1 a t_2 modelují dvě vzájemně nezávislé události (operace) a mohou být provedeny v libovolném pořadí.

PETRIHO SÍTĚ

1. Motivace

- modely diskrétních systémů
- " paralelních výpočtů
- " distribuovaných systémů

návrh x syntéza x analýza x verifikace

2. Historie

- C.A. Petri : kommunikation mit automaten - dokt. dis. práce, 1962
- 70-tá léta MIT (analýza P. sítí)
- Bonn Aarhus (Dánsko) - systémy pro práci s P. sítěmi
- ESPRIT, COST
- katedra IVT v Brně
  - (1) metodika modelování v diskr. simulačních jazycích
  - (2) PESIM - systém pro práci s P. sítěmi

3. Aplikace

- hardware (par. architektury)
- software (distr. systémy, inf. systémy, kom. protokoly)
- CAD - CASE-tools
- telekomunikace, strojírenství, administrativa

2. Condition-Event Nets (C/E-sítě)

2.1. Cases and steps

Základní sémantika C/E-sítí:

prvky z množiny P označují podmínky
— " — T označují události

Definice 1

Nechť $N = (B, E, F)$ je síť.

(1) Podmnožina $c \subseteq B$ se nazývá případ (case)

(2) Nechť $e \in E$ a $c \subseteq B$. Událost e je proveditelná, přesněji c-proveditelná, jestliže

$$\boxed{{}^{\bullet}e \subseteq c \;\wedge\; e^{\bullet} \cap c = \emptyset}$$

(3) Nechť $e \in E$, $c \subseteq B$ a nechť e je c-proveditelná. Případ $\boxed{c' = (c \setminus {}^{\bullet}e) \cup e^{\bullet}}$ se nazývá následným případem c (následníkem k c) při události e. Píšeme

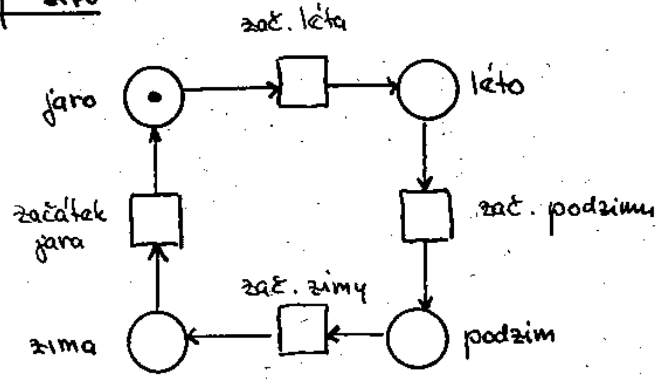
$$\boxed{c\,[e\rangle\, c'}$$

Pozn. (značení složek sítě):

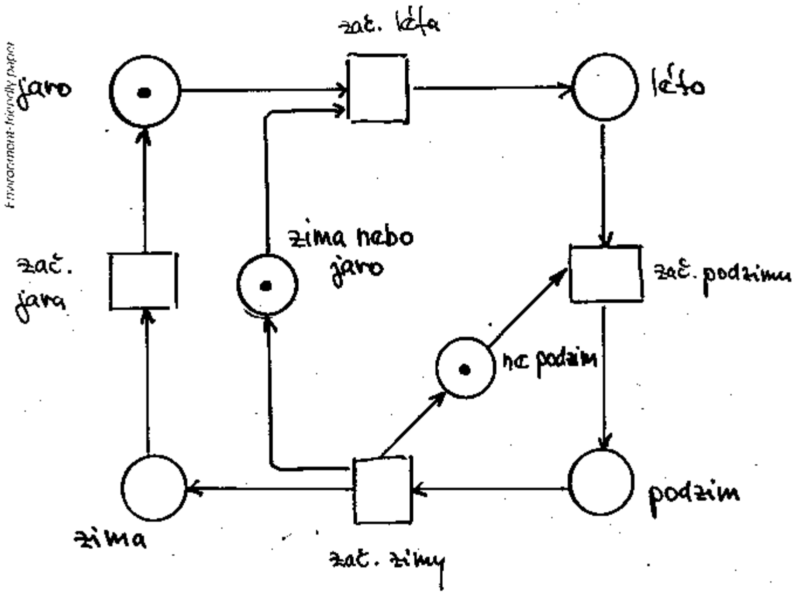
e Bedingung = podmínka
s Ereignis = událost

Grafické vyznačení případu c: pomocí teček (značek)

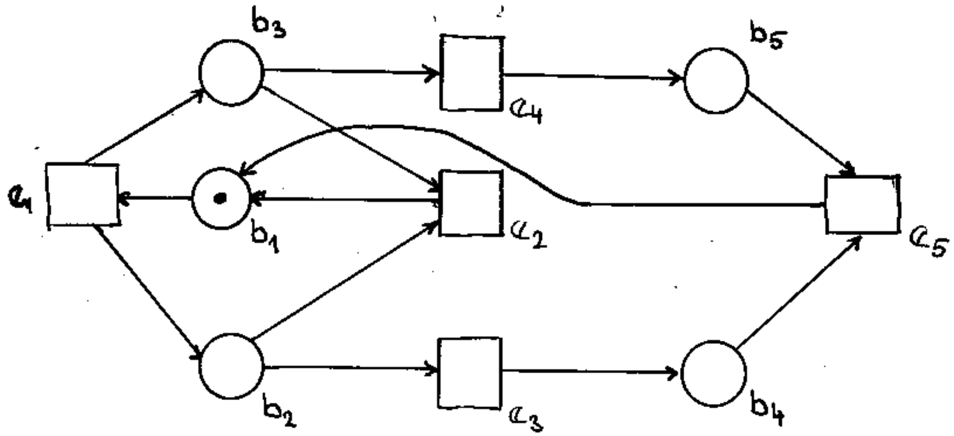
Příklady sítí:



Př. 1. Model změn ročních období



Příklad 2: Alternativní model k př. 1



Příklad 3 : Ilustrační příklad

$\{b_1\} [e_1\rangle \{b_2,b_3\} [e_4\rangle \{b_2,b_5\} [e_3\rangle \{b_4,b_5\} [e_5\rangle \{b_1\}$

Různé „typy" událostí :

e_1 předchází e_3 i e_4

e_3, e_4 jsou alternativy k e_2

e_3, e_4 mohou být sloučeny (kombinovány) do 1 kroku

Poznámka

Situace pro případ c, kdy

$$^\bullet e \subseteq c \wedge e^\bullet \cap c \neq \emptyset$$

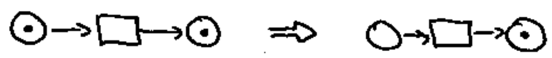
se nazývá kontaktní situací

Proč vadí ?

1. „proměnná s určitým obsahem je znovu načtena" avšak „začne podzim v případě že je podzim"

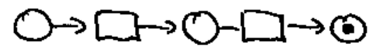
2. nejednoznačnost

Předpokládejme, že připustíme



Pak ze situace

nevíme, zda výsledkem bude případ



nebo případ

Definice 2

Nechť $N=(B,E,F)$ je síť.

(1) Množina událostí $G \subseteq E$ se nazývá <u>samostatná</u> (<u>detached</u>), jestliže

$$\boxed{\forall e_1, e_2 \in G : e_1 \neq e_2 \Rightarrow {}^\bullet e_1 \cap {}^\bullet e_2 = \emptyset = e_1^\bullet \cap e_2^\bullet}$$

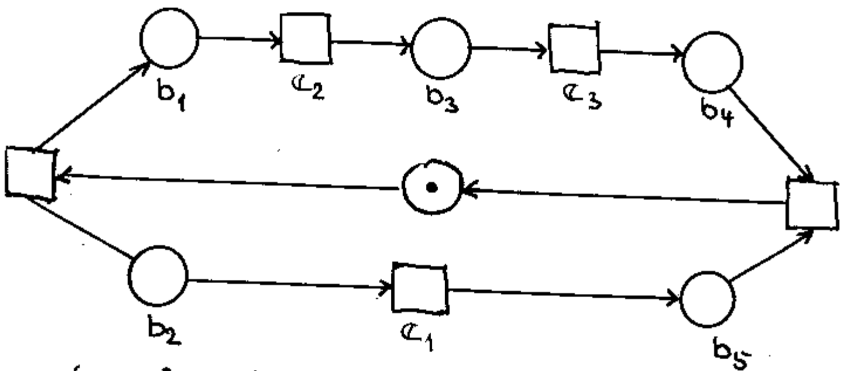
(2) Nechť c, c' jsou případy N a nechť $G \subseteq E$ je samostatná. G se nazývá <u>krokem</u> z c do c' (notace <u>$c[G\rangle c'$</u>) jestliže každá událost $e \in G$ je c-proveditelná a

$$\boxed{c' = (c \setminus {}^\bullet G) \cup G^\bullet}$$

Lemma 1

$$\boxed{c[G\rangle c' \iff c \setminus c' = {}^\bullet G \wedge c' \setminus c = G^\bullet}$$

Příklad 4



$\{e_1, e_2\}$ je krok z $\{b_1, b_2\}$ do $\{b_3, b_5\}$

$\{e_1, e_3\}$ je krok z $\{b_2, b_3\}$ do $\{b_4, b_5\}$

Krok je důležitým pojmem pro popis procesů generovaných danou sítí (viz dále)

Lemma 2

Nechť N je síť, c, c' případy sítě N a nechť G je konečný krok z c do c'. Nechť $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ je libovolné uspořádání událostí kroku $G = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Pak existují případy $c_0, c_1, \ldots, c_n$ takové, že

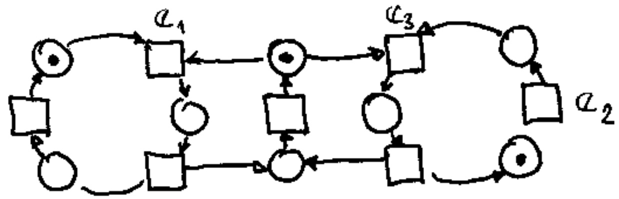
$$\boxed{\begin{array}{l} c = c_0,\ c' = c_n \quad \text{a} \\ c_{i-1}[e_i\rangle c_i \quad \text{pro } i = 1, \ldots, n \end{array}}$$

Důkaz

Nechť $e, e' \in G$ a nechť c je případ, ve kterém jsou proveditelné obě události e, e'. Pak ${}^\bullet e \cap {}^\bullet e' = \emptyset \wedge e^\bullet \cap e'^\bullet = \emptyset$. Takže když $c[e\rangle c'$, pak ${}^\bullet e' \subseteq c'$. Analogicky platí $e'^\bullet \cap c' = \emptyset$, a tedy e' je proveditelná v c'. Zbytek indukce.

Pozn. konflikty, confusion (zmatek)

Příklad 5



Jestli e_1 se objeví před e_2, pak nebude konflikt mezi e_1, avšak jestli e_2 bude před e_1, pak vzniká konflikt.

<u>confusion</u> = nespecifikované pořadí provádění e_1, e_2.

2.2. C/E systémy

Omezuje se množina případů C:

(1) C je „uzavřena"

(2) C je „dostatečně" veliká

(i) každé události přísluší případ

(ii) každá podmínka patří alespoň do jednoho případu, avšak ne do každého (to vylučuje smyčky a izol. prvky)

(3) nepovoluje se dvě podmínky (události), které mají shodné presety a postsety

Definice 3

Čtveřice $\Sigma = (B, E, F, C)$ se nazývá Condition/Event systém (C/E systém) jestliže:

(1) (B, E, F) je jednoduchá síť bez izolovaných prvků, $B \cup E \neq \emptyset$

(2) $C \subseteq 2^B$ je faktorová množina vzhledem k relaci dosažitelnosti $R_\Sigma = (r_\Sigma \cup r_\Sigma^{-1})^*$, kde $r_\Sigma \subseteq 2^B \times 2^B$ je dána vztahem

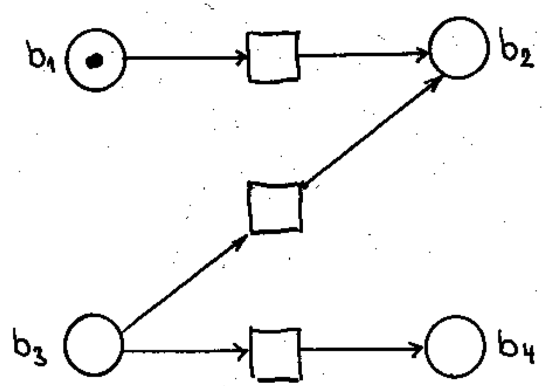
třídou

$$\boxed{c_1 r_\Sigma c_2 \overset{def.}{\iff} \exists G \subseteq E : c_1 [G> c_2}$$

C se nazývá případová třída sítě Σ (case class)

(3) $\forall e \in E \; \exists c \in C$ tak, že e je c-proveditelná

Příklad 6



C/E systém, případová třída $C = \{\{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \{b_4\}\}$

Pozn.:

Případová třída C lib. C/E systému je plně určena libovolným prvkem C.

Tvrzení 1 Nechť Σ je C/E systém.

(1) $B \neq \emptyset \wedge E \neq \emptyset \wedge F \neq \emptyset$

(2) $\forall c \in C$, $c' \subseteq B$ a $G \subseteq E$

$c[G> c' \Rightarrow c' \in C$ a

$c'[G> c \Rightarrow c' \in C$

(3) $\forall b \in B \; \exists c, c'$ tak, že $b \in c \wedge b \notin c'$

(4) Σ je čistá síť

Tvrzení 2

Nechť Σ je C/E systém a nechť $\hat{r} \subseteq 2^B \times 2^B$ je relace definovaná vztahem

$$c_1 \hat{r} c_2 \overset{def}{\iff} \exists e \in E : c_1[e>c_2$$

Je-li E konečná množina, pak

$$\boxed{R_\Sigma = (\hat{r} \cup \hat{r}^{-1})^*}$$

Důkaz

Pro $\hat{R} = (\hat{r} \cup \hat{r}^{-1})^*$ platí triviálně $\hat{R} \subseteq R_\Sigma$. Protože E je konečná, každý krok sítě Σ je konečný a proto z L1 plyne $r_\Sigma \subseteq \hat{r}^*$ a $r_\Sigma^{-1} \subseteq (\hat{r}^{-1})^*$. Z toho pak dostaneme $R_\Sigma \subseteq \hat{R}$

2.3. Cyklické a živé systemy

Definice 4

C/E system Σ se nazývá cyklický, jestliže

$$\boxed{\forall c_1, c_2 \in C : c_1 r_\Sigma^* c_2}$$

Tvrzení

Nechť Σ je cyklický C/E systém a nechť $c \in C$.

Pak $C = \{c' \mid c r_\Sigma^* c'\}$

Definice 5

C/E Systém Σ je živý, jestliže

$\forall c \in C\ \forall e \in E\ \exists c' \in C$ takový že $c\, r_\Sigma^* c'$ a e je c'-proveditelná

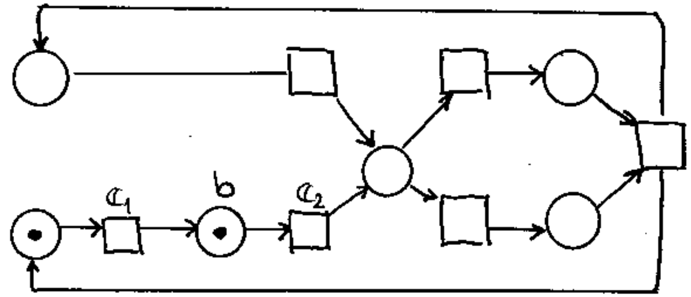
Tvrzení

Každý cyklický C/E systém je živý.

Důkaz

Nechť $c \in C$ a $e \in \Sigma$. Podle definice 3 existuje $c' \in C$, takový, že e je c'-proveditelná. Podle definice 4 platí $c r_\Sigma^* c'$.

Příklad 7



Příklad C/E systému, který je živý, avšak není cyklický – uvedený případ není reprodukovatelný.

2.4. Ekvivalence C/E systémů

Definice 6

Nechť Σ a Σ' jsou C/E systémy.

(1) Jsou-li dány bijekce

$$\beta: C_\Sigma \to C_{\Sigma'} \quad a \quad \varepsilon: E_\Sigma \to E_{\Sigma'}, \text{ pak}$$

systémy Σ, Σ' nazýváme (β,ε)-ekvivalentní, jestliže pro všechny případy $c_1, c_2 \in C_\Sigma$ a všechny mn. událostí $G \subseteq E_\Sigma$ platí:

$$\boxed{c_1 [G\rangle c_2 \iff \beta(c_1) [\varepsilon(G)\rangle \beta(c_2)}$$

(2) Σ, Σ' jsou isomorfní, jestliže sítě $(B_\Sigma, E_\Sigma, F_\Sigma)$ a $(B_{\Sigma'}, E_{\Sigma'}, F_{\Sigma'})$ jsou izomorfní při bijekci β a jestliže

$$\boxed{c \in C_\Sigma \iff \{\beta(b) \mid b \in c\} \in C_{\Sigma'}}$$

Notace

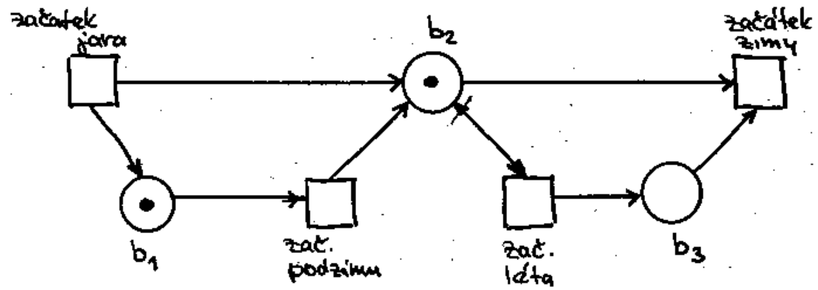
$\Sigma \sim \Sigma'$ jsou-li Σ a Σ' ekvivalentní

Tvrzení $\sim$ je relace ekvivalence

Tvrzení

Ekvivalentní C/E systémy mají vždy stejný počet případů, událostí a kroků. Mohou se lišit v mohutnosti množin podmínek.

Příklad 8



Příklad C/E systému ekvivalentnímu systémům z Př. 1, 2

Jeho případy jsou:

$\{b_1, b_2\} \equiv$ jaro

$\{b_1, b_3\} \equiv$ léto

$\{b_2, b_3\} \equiv$ podzim

$\emptyset \equiv$ zima

Tvrzení Nechť Σ, Σ' jsou ekvivalentní C/E systémy

(1) Σ je cyklický $\iff$ Σ' je cyklický

(2) Σ je živý $\iff$ Σ' je živý

Lemma Nechť Σ a Σ' jsou C/E systémy, pro které platí: $\forall c \in C_\Sigma \cup C_{\Sigma'} : |c| = 1$

Σ a Σ' jsou ekvivalentní právě když jsou izomorfní

2.5. Bezkontaktní C/E systémy

Definice 7

Nechť Σ je C/E systém a nechť $b, b' \in B$.

(1) b' se nazývá <u>komplement</u> b, jestliže ${}^\bullet b = b'^\bullet$ a $b^\bullet = {}^\bullet b'$

(2) Σ se nazývá <u>úplný</u>, jestliže každý prvek $b \in B$ má komplement $b' \in B$.

Lemma Nechť Σ je C/E systém a $b \in B$

(1) b má nejvýše jeden komplement; označme jej $\hat{b}$.

Jestliže b má komplement $\hat{b}$, pak

(2) $\hat{b}$ má komplement a $\hat{\hat{b}} = b$

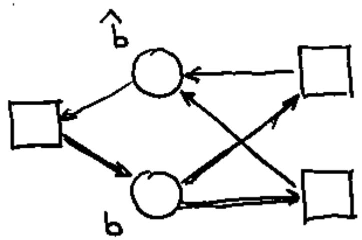
(3) $\forall c \in C : b \in c \vee \hat{b} \in c$

Je-li Σ úplný C/E systém, pak

(4) $\forall e \in E \quad |{}^\bullet e| = |e^\bullet|$

(5) $\forall c \in C : |c| = \frac{1}{2}|B|$

Příklad 9



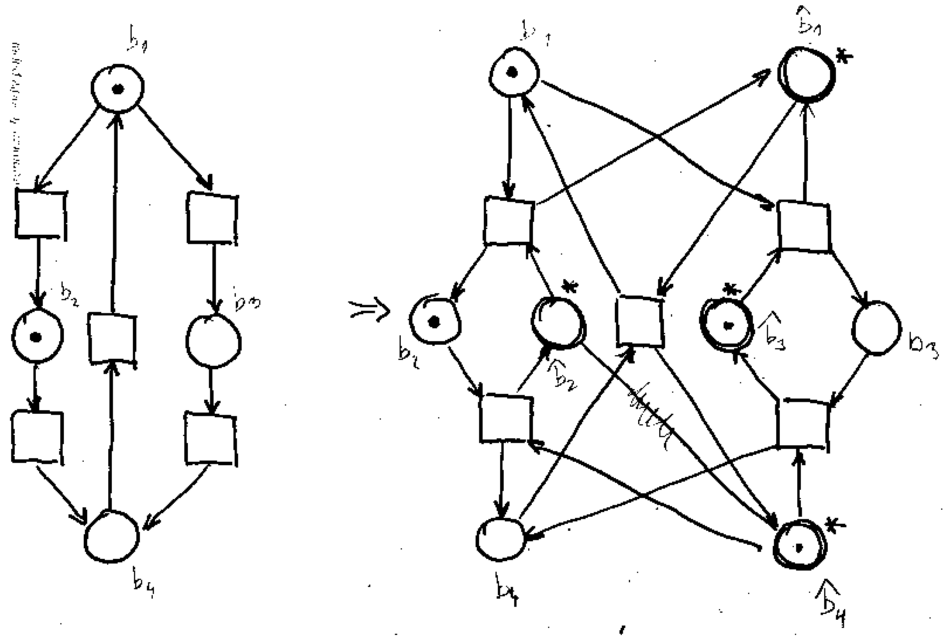
Definice 8

Nechť Σ je C/E systém a nechť $B \subseteq B_\Sigma$ je množina podmínek které nemají komplement v B_Σ. Pro každé $b \in B$ nechť $\hat{b}$ označuje nový prvek. Položme

$$F = \{(e,\hat{b}) \mid (b,e) \in F_\Sigma \wedge b \in B\} \cup \{(\hat{b},e) \mid (e,b) \in F_\Sigma \wedge b \in B\}$$

Pro $c \in C_\Sigma$ nechť $\varphi(c) = c \cup \{\hat{b} \mid b \in B \wedge b \notin c\}$. Pak C/E systém $\hat{\Sigma} = (B_\Sigma \cup \{\hat{b} \mid b \in B\}, E_\Sigma, F_\Sigma \cup F, \varphi(C_\Sigma))$ je <u>komplementací systému</u> Σ. $\varphi(c)$ je <u>komplementací</u> c.

Příklad 10



* nové prvky

Tvrzení

Nechť Σ je C/E systém a $c \in C$

(1) $\hat{\hat{\Sigma}} = \hat{\Sigma}$

(2) $\forall b \in B \; \forall c \in C : b \in \varphi(c) \Leftrightarrow \hat{b} \notin \varphi(c)$

(3) $c = \varphi(c) \cap B$

Notace

Nechť Σ je C/E systém a nechť $e \in E_\Sigma$. Označme ${}^{-}e$, resp. e^{-} pre resp. postset události e v $\hat{\Sigma}$ (na rozdíl od ${}^{\bullet}e$, $e^{\bullet}$)

Tvrzení

Nechť Σ je C/E systém a nechť $G \subseteq E_\Sigma$ a B je množina podmínek, které nemají komplement.

(1) ${}^{-}G = {}^{\bullet}G \cup \{\hat{b} \mid b \in B \wedge b \in G^{\bullet}\}$

$G^{-} = G^{\bullet} \cup \{\hat{b} \mid b \in B \wedge b \in {}^{\bullet}G\}$

(2) ${}^{\bullet}G = {}^{-}G \cap B_\Sigma$, $G^{\bullet} = G^{-} \cap B_\Sigma$

Theorem 1

Je-li $\hat{\Sigma}$ komplementací systému Σ, pak $\hat{\Sigma}$ a Σ jsou ekvivalentní

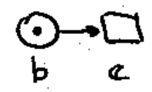
Důkaz.

Definice 9

Nechť Σ je C/E systém. Σ se nazývá bezkontaktní, jestliže pro každé $e \in E_\Sigma$ a každé $c \in C_\Sigma$ platí:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & {}^{\bullet}e \subseteq c \Rightarrow e^{\bullet} \subseteq B_\Sigma \setminus c \\ (2) & e^{\bullet} \subseteq c \Rightarrow {}^{\bullet}e \subseteq B_\Sigma \setminus c \end{array}}$$

Pozn. Podmínka (2) neplyne vždy s (1). Prověř.



$B_\Sigma = \{b\}$
$C = \{\{b\}, \emptyset\}$
${}^{\bullet}e = \{b\}$
$e^{\bullet} = \emptyset$

Theorem 2

(1) Každý úplný C/E systém je bezkontaktní

(2) Pro každý C/E systém existuje ekvivalentní bezkontaktní systém

(3) Je-li Σ bezkontaktní, pak

$$\forall e \in E_\Sigma : {}^{\bullet}e \neq \emptyset \wedge e^{\bullet} \neq \emptyset$$

2.6. Case grafy (grafy případů)

Zdkl. sémantika: uzly reprezentují případy
hrany -"- kroky

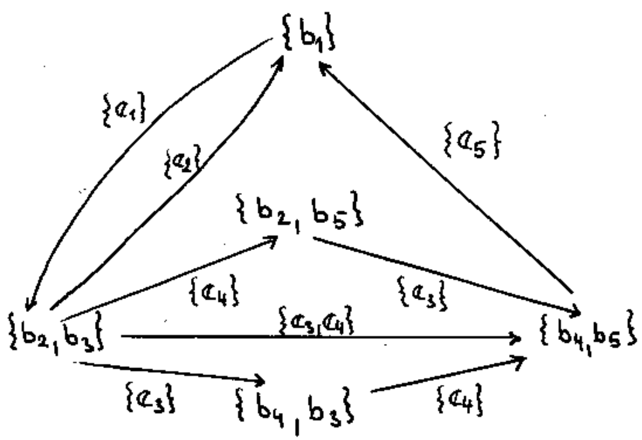
Definice 10

Nechť Σ je C/E systém, $\mathcal{C}$ nechť je množina všech kroků systému Σ a nechť H je množina

$$\boxed{H = \{(c_1,G,c_2)\in C_\Sigma \times \mathcal{C} \times C_\Sigma \mid c_1[G>c_2\}}$$

Pak graf $\Phi_\Sigma = (C_\Sigma, H)$ se nazývá case graf (graf případů) C/E systému Σ.

Příklad 11



Case graf odpovídající systému z Př. 3

Teorem 3

C/E systém Σ je cyklický, právě když je jeho case graf silně souvislý.

Důkaz

Σ je cyklický $\iff \forall c,c'\in C_\Sigma : c\, r_\Sigma^* c'$

$\iff \forall c,c'\in C_\Sigma\ \exists G_1,\dots G_n \in \mathcal{C}\ \exists c_0,\dots,c_n \in C_\Sigma :$
$c_0[G_1>c_1 \dots [G_n>c_n \ \wedge\ c_0 = c \ \wedge\ c_n = c'$

$\iff \Phi_\Sigma$ je silně souvislý

Theorem 4

C/E systém Σ je živý, když a jen když pro každé $c_0\in C_\Sigma$ a pro každé $e\in E_\Sigma$ existuje cesta v Φ_Σ:

$c_0 h_1 c_1 \dots h_n c_n$ kde $h_n = \{e\}$
$h_m = c_{m-1}[e>c_m$

Důkaz: Σ je živý $\iff \forall c_0 \in C_\Sigma\ \forall e\in E_\Sigma\ \exists c,c'\in C_\Sigma :$
$c_0 r_\Sigma^* c \ \wedge\ c[e>c' \iff$
v Φ existuje cesta $c_0 h_1 \dots c_{n-1} h_n c_n$ kde $c_{n-1} = c$, $h_n = \{e\}$, $c_n = c'$

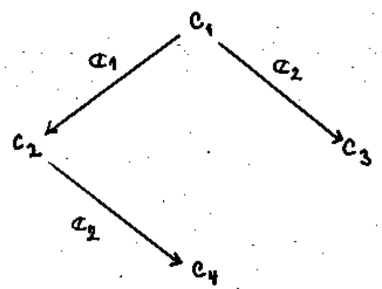
Theorem 5

Dva C/E systémy jsou ekvivalentní, právě když jsou jejich case grafy izomorfní.

Důkaz:

Cvičení

Ne každý graf je grafem C/E systému. Např. graf



není grafem žádného C/E systému:

- V případě c_1 jsou proveditelné události e_1, e_2
  - jestliže existuje konflikt mezi e_1 a e_2, pak e_2 není c_2-proveditelná a graf nesmí mít hranu $(c_2, \{e_2\}, c_4)$
  - jestliže tento konflikt neexistuje, pak e_1 je proveditelná také v c_3 a tudíž chybí hrana $(c_3, \{e_1\}, c_4)$

V „silně" paralelních systémech se case graf stává velmi složitým. Např krok, který obsahuje n událostí generuje 2^n hran tohoto grafu.

Theorem 6

Nechť Σ je C/E systém, $c_1, c_2, c_3 \in C_\Sigma$ a $G_1, G_2 \subseteq E_\Sigma$.

(1) Jestli $c_1 G_1 c_2 G_2 c_3$ je cesta v Φ_Σ, pak $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

(2) Nechť $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Jestli $c_1 (G_1 \cup G_2) c_3$ je hrana v Φ_Σ, pak existuje $c \in C_\Sigma$ tak, že $c_1 G_1 c\, G_2 c_3$ je také cesta v Φ_Σ.

Důkaz: (1) $e \in G_1 \Rightarrow c_2 \cap {}^{\bullet}e = \emptyset \Rightarrow e$ není c_2-proveditelná $\Rightarrow e \notin G_2$

(2) $c_1 (G_1 \cup G_2) c_2$ je hrana $\Phi_\Sigma \Rightarrow c_1 [G_1 \cup G_2\rangle c_2 \Rightarrow$
$c_1 [G_1\rangle c \wedge c [G_2\rangle c_2$

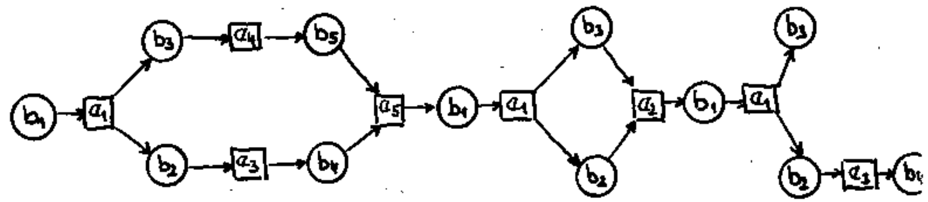
3. PROCESY C/E SYSTÉMŮ

Problém reprezentace procesů

1. Prostřednictvím case grafu jako cesta v grafu (není zcela adekvátní)

2. Výskytová síť (occurrence net)
   jednoznačný, explicitní záznam výskytů událostí a změn podmínek systému

Příklad 1.



Reprezentace procesů při provádění sítě z Př. 3 (kap. 2) odpovídající posloupnosti např.

$\{b_1\} [e_1\rangle \{b_2, b_3\} [e_4\rangle \{b_2, b_5\} [e_3\rangle \{b_4, b_5\} [e_5\rangle \{b_1\} [e_1\rangle$

$\{b_2, b_3\} [e_2\rangle \{b_1\} [e_1\rangle \{b_2, b_3\} [e_3\rangle \{b_4\}$

Atributy této reprezentace:
- ohodnocená síť
- částečně uspořádaná síť

3.1. Částečně uspořádané množiny

Definice 0

Nechť M je množina. Relace $\rho \subseteq M \times M$ se nazývá <u>částečné uspořádání</u>, jestliže $\forall a,b \in M$

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) \ \neg(a \rho a) & [\rho \text{ je ireflexivní}] \\ (2) \ a\rho b \wedge b \rho c \Rightarrow a \rho c & [\rho \text{ je tranzitivní}] \end{array}}$$

Část. uspořádání ρ budeme zapisovat symbolem $<$ (bez ohledu na nosič). Dále $a \leq b \iff a < b \vee a = b$

Ukážeme nyní některé vlastnosti relace, která popisují vztah „kauzální závislosti a nezávistosti".

Definice 1

Nechť A je množina. Relace $\rho \subseteq A \times A$ se nazývá <u>relací podobnosti</u> (<u>tolerance</u>) (angl. <u>similarity relation</u>), jestliže

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) \ \forall a \in A : a \rho a & [\rho \text{ je reflexivní}] \\ (2) \ \forall a,b \in A : a \rho b \Rightarrow b \rho a & [\rho \text{ je symetrická}] \end{array}}$$

Podmnožina $B \subseteq A$ se nazývá <u>oblastí relace podobnosti ρ</u> jestliže

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) \ \forall a,b \in B : a \rho b & [\rho \text{ je úplnou relací na } B] \\ (2) \ \forall a \in A : a \notin B \Rightarrow \exists b \in B : \neg(a \rho b) & \\ & [B \text{ je maximální}] \end{array}}$$

<u>Tvrzení 1</u>: Nechť ρ je relace podobnosti na A.

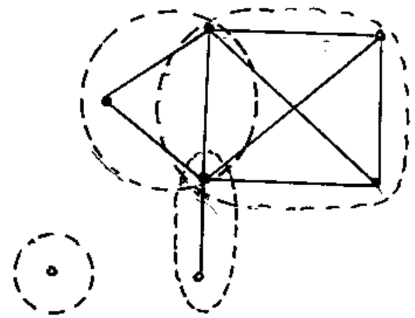
(1) Každý prvek $a \in A$ patří alespoň do jedné oblasti relace ρ
(2) Žádná oblast není vlastní podmnožinou jiné oblasti
(3) Je-li ρ zároveň ekvivalence, pak její oblasti jsou shodné s třídami rozkladu generovaného touto ekvivalencí.

<u>Grafická reprezentace relace podobnosti</u>:

Neorientovaným grafem kde

A je množina vrcholů a
$K = \{(a,b) \mid a \neq b \wedge a \rho b\}$ je množina hran

Příklad 2



Příklad relace podobnosti a její oblastí

Definice 2

Nechť A je částečně uspořádaná množina

(1) Nechť $\underline{li} \subseteq A \times A$ je binární relace

$$\boxed{a \ \underline{li} \ b \iff a < b \vee b < a \vee a = b}$$

(2) $\underline{co} \subseteq A \times A$ je bin. relace

$$\boxed{a \ \underline{co} \ b \iff \neg(a \ \underline{li} \ b) \vee a = b}$$

(tzn. $a \ \underline{co} \ b \iff \neg(a < b \vee b < a)$)

Tvrzení 2

Nechť A je část. uspořádaná množina a nechť $a,b \in A$.

(1) $a \; \underline{li} \; b \; \vee \; a \; \underline{co} \; b$

(2) $a \; \underline{li} \; b \; \wedge \; a \; \underline{co} \; b \iff a=b$

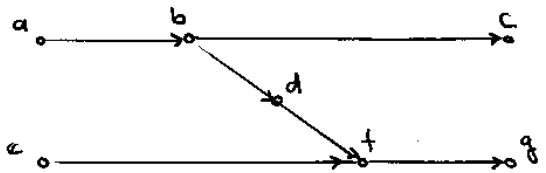
Theorem 1.

Pro každou část. uspořádanou množinu (poset) jsou bin. relace $\underline{li}$ a $\underline{co}$ relacemi podobnosti.

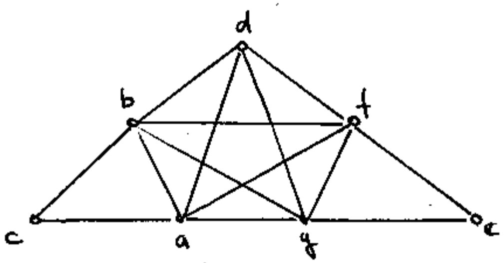
D.

Příklad 3

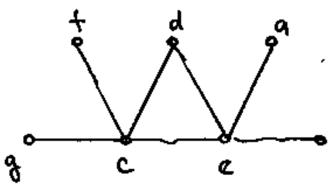
Uvažujme poset:



Odpovídající graf. reprezentace relací $\underline{li}$ a $\underline{co}$:



$\underline{li}$



$\underline{co}$

Definice 3

Nechť A je poset a $B \subseteq A$.

(1) B se nazývá ~~čarou~~ řetězcem (line), je-li B oblastí $\underline{li}$

(2) B se nazývá **řezem** (cut), je-li B oblastí $\underline{co}$

Př. 4. Část. uspořádání z př. 3 má

3 ~~čáry~~ řetězce : $\{a,b,c\}, \{e,f,g\}$ a $\{a,b,d,\cancel{e}f,g\}$ a

5 řezů : $\{e,a\}, \{e,b\}, \{e,d,c\}, \{f,c\}$ a $\{g,c\}$

Tvrzení 3

Nechť A je poset a $B \subseteq A$

(i) B je ~~čarou~~ řetězcem právě když

(a) $\forall a,b \in B : a<b \vee b<a \vee a=b$ a

(b) $\forall a \in A \setminus B \; \exists b \in B : \neg(a<b \vee b<a)$

(ii) B je řezem právě tehdy, když

(a) $\forall a,b \in B : \neg(a<b \vee b<a)$ a

(b) $\forall a \in A \setminus B \; \exists b \in B : (a<b \vee b<a)$

Definice 4

Nechť A je poset a nechť $B,C \subseteq A$.

(1) Množina A se nazývá omezená (ohraničená), jestliže existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že pro každý ~~čáru~~ řetězec množiny A platí $|L| \leq n$.

(2) B předchází C (píšeme $B \leq C$), jestliže

$$\forall b \in B \; \forall c \in C : b<c \vee b \; \underline{co} \; c$$

($B<C$ značí $B \leq C$ a $B \neq C$)

(3) Nechť $B^- = \{a \in A \mid \{a\} \leq B\}$

$B^+ = \{a \in A \mid B \leq \{a\}\}$

(4) Nechť $°B = \{b \in B \mid \forall b' \in B : b \; \underline{co} \; b' \vee b < b'\}$

$B° = \{b \in B \mid \forall b' \in B : b \; \underline{co} \; b' \vee b' < b\}$

Zřejmě $°A$ obsahuje minimální prvky množiny A, $A°$ pak maximální prvky mn. A.

Theorem 2

Je-li A omezená část. usp. množina, pak $°A$ a $A°$ jsou řezy.

Důkaz: Nechť a, b jsou lib. prvky $°A$. Pak $a \; \underline{co} \; b$, protože $\neg(a<b \vee b<a)$. Nechť $c \in A \setminus °A$ a nechť L je řetězec a $c \in L$. Protože L je konečná mn., existuje $d \in L \cap °A$ a proto $d < c$. Podle Tvr. 3 (ii) je $°A$ řezem. Pro $A°$ analogicky.

Tvrzení 4

Nechť A je poset, L řetězec a D řez množiny A. Pak

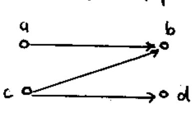
$$\boxed{|L \cap D| \leq 1}$$

Důkaz Nechť $a, b \in L \cap D$. Pak $a \; \underline{li} \; b$, protože $a, b \in L$. Avšak $a \; \underline{co} \; b$, protože $a, b \in D$. Podle Tvr. 2 (2) je $a = b$.

Definice 5

Poset A se nazývá K-hustým (K-dense), jestliže každý řetězec má neprázdný průnik s každým řezem.

Příklad 4



Poset, který není K-hustý: $\{c, b\} \cap \{a, d\} = \emptyset$

3.2. Výskytové sítě (Occurrence Nets)

Definice 6

Síť $K = (S_K, T_K, F_K)$ se nazývá výskytová síť, jestliže

(1) $\forall a, b \in K : a F_K^+ b \Rightarrow \neg (b F_K^+ a)$

t.j. K nemá cykly

(2) $\forall s \in S_K : |°s| \leq 1 \wedge |s°| \leq 1$

t.j. místa sítě nejsou větvena

Tvrzení 5 Nechť K je výskytová síť. Relace $<$ definovaná:

$$a < b \overset{def.}{\Longleftrightarrow} a F_K^+ b \text{ pro vš. } a, b \in K$$

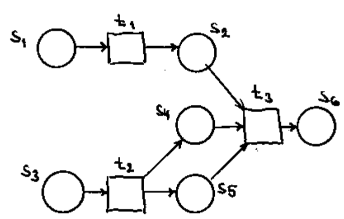
je částečné uspořádání na K (t.j. $S_K \cup T_K$).

Pozn. To znamená, že pro K jsou definovány dříve zavedené pojmy: řetězce, řezy, omezenost, K-hustota

Definice 7

S-řezem (slice) nazýváme řez, který obsahuje pouze místa. Označme $\underline{sl}(K)$ množinu všech S-řezů sítě K.

Příklad 5 (příklady S-řezů)



Tato síť má 3 řetězce, 11 řezů, z toho 5 S-řezů

Př. řetězce: $\{s_3, t_2, s_4, t_3, s_6\}$

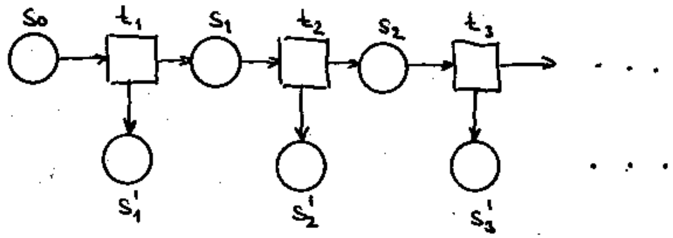
Příklad řezu: $\{t_1, s_4, s_5\}$

Příklad S-řezu: $\{s_1, s_3\}$ S-řez musí být maximální

Theorem 3

Každá omezená neprázdná výskytová síť je K-hustá.

Příklad 6 (síť, která není K-hustá)



$$\{s_0, t_1, s_1, \dots\} \cap \{s_1', s_2', \dots\} = \emptyset$$

Pokud by tato síť byla konečná:

$$|\{s_0, t_1, s_1, \dots, t_n, s_n'\} \cap \{s_1', \dots, s_n'\}| = 1$$

3.3. Procesy

Proces definujeme jako zobrazení z omezené výskytové sítě do bezkontaktního C/E systému, které splňuje 2 požadavky:

(1) každý S-řez sítě je injektivně zobrazen na nějaký případ C/E systému $\quad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

(2) zobrazení přechodů výsk. sítě na události C/E systému respektují okolí události

Definice 8

Nechť K je omezená výskytová síť a nechť Σ je bezkontaktní C/E systém. Zobrazení $p: K \to \Sigma$ se nazývá proces systému Σ, jestliže pro každý S-řez D sítě K a každý přechod $t \in T_K$ platí:

(1) $p|D$ je injektivní a $p(D) \in C_\Sigma$

(2) $p({}^\bullet t) = {}^\bullet p(t) \ \wedge \ p(t^\bullet) = p(t)^\bullet$ zachování okolí

Grafická reprezentace procesů $p: K \to \Sigma$:

$\boxed{\text{každý prvek } x \text{ sítě } K \text{ je označen (labelled) svým obrazem } p(x).}$

Síť z Příkl. 1 je procesem z příkladu 3, kap. 2.

Theorem 4

Pro každý proces $p: K \to \Sigma$ platí:

(1) $p(S_K) \subseteq B_\Sigma \ \wedge \ p(T_K) \subseteq E_\Sigma$ — p zachovává druhy

(2) $\forall x, y \in K: x F_K y \Rightarrow p(x) F_\Sigma p(y)$ — p zachovává relaci toku

(3) $\forall x, y \in K: p(x) = p(y) \Rightarrow x \,\underline{li}\, y$ — podmínky $\neq$ a události nejsou vzájemně paralelní

(4) $\forall t \in T_K: {}^\bullet t \neq \emptyset \wedge t^\bullet \neq \emptyset$ — události mají antecendenty a konsekventy

důsledek bezkontaktnosti

(5) pro každý řez D sítě K: $p|D$ je injektivní

Theorem 5

Nechť $p: K \to \Sigma$ je proces, nechť $T \subseteq T_K$ pro platí $\forall t_1,t_2 \in T: t_1 \ \underline{co}\ t_2$.
Pak $\exists c_1, c_2 \in C_\Sigma : c_1[p(T)\rangle c_2$.

Důkaz: Zřejmě $\forall s_1,s_2 \in {}^\bullet T: s_1 \ \underline{co}\ s_2$. Pak tedy existuje $D \in \underline{sl}(K)$, pro který ${}^\bullet T \subseteq D$. Podle definice 8 $p(D) \in C_\Sigma$ a ${}^\bullet p(T) = p({}^\bullet T) \subseteq p(D)$. Dále $\forall s \in T^\bullet \ \exists s_1 \in D$ takové, že $s_1 < s$. Proto $T^\bullet \cap D = \emptyset$ a také $p(D) \cap p(T^\bullet) = p(D) \cap p(T)^\bullet = \emptyset$. Tudíž $p(T)$ je $p(D)$ proveditelný krok.

Pozn. Izomorfismus výsk. sítí – nepojmenovávají se prvky sítě

Každý bezkontaktní C/E systém je plně charakterizován množinou svých procesů. Proces $p: K \to \Sigma$ je skutečně reprezentován množinou dvojic $\{(x, p(x)) \mid x \in K\}$.

Theorem 6

Nechť Σ_1, Σ_2 jsou dva bezkont. C/E systémy a nechť P_i jsou množiny procesů systémů Σ_i $(i=1,2)$. Pak

$$P_1 = P_2 \iff \Sigma_1 = \Sigma_2$$

Důkaz: Nechť $\Sigma_i = (B_i, E_i, F_i, C_i)$, $i=1,2$ a nechť $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$. Pak existují $b \in B_1 \cup B_2$ nebo $e \in E_1 \cup E_2$ nebo $c \in C_1 \cup C_2$ takový, že $b \in B_1 \setminus B_2$ nebo $e \in E_1 \setminus E_2$ nebo $(b,e) \in F_1 \setminus F_2$ nebo $(e,b) \in F_1 \setminus F_2$ nebo $c \in C_1 \setminus C_2$. Pak ale existuje krok $c_1[e'\rangle c_2$ v Σ_1, který není možný v Σ_2 (výběr $b \in c_1 \cup c_2$ nebo $e' = e$ nebo $c_1 = c$ nebo $c_2 = c$). Pro $K = (S, \{t\}, F)$ nechť $p: K \to \Sigma_1$ je proces pro který $p({}^\circ K) = c_1$ a $p(K^\circ) = c_2$ a $p(t) = e'$. Pak $p \in P_1 \setminus P_2$.

3.4 Kompozice procesů

Za předpokladu, že proces p_1 končí v stejném případu (stavu) ve kterém proces p_2 začíná, definujeme kompozici

$$\boxed{p_1 \circ p_2}$$

Lemma 1

Je-li $p: K \to \Sigma$ proces, pak ${}^\circ K$ a K° jsou S-řezy mn. K.

Důkaz. Podle Th. 2 jsou ${}^\circ K$ a K° řezy množiny K. Protože Σ je bezkontaktní, pak pro každé $e \in E_\Sigma$ je ${}^\bullet e \neq \emptyset$ a $e^\bullet \neq \emptyset$. Z Def. 5(2) plyne ${}^\circ K \cup K^\circ \subseteq S_K$

Lemma 2

Nechť $p_i: K_i \to \Sigma$, $i=1,2$, jsou dva procesy, pro které $p_1(K_1^\circ) = p_2({}^\circ K_2)$. Pak existuje právě jedna (až na izomorfismus) výskytová síť K a S-řez této sítě D a proces $p: K \to \Sigma$ takový, že

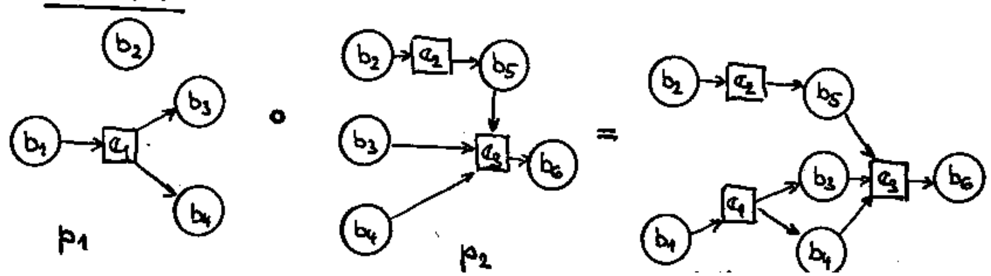
$$\boxed{p|D^- = p_1 \quad a \quad p|D^+ = p_2}$$

Důkaz: Nechť $K_i = (S_i, T_i, F_i)$, $i=1,2$ a nechť $(S_1 \cup T_1) \cap (S_2 \cup T_2) = K_1^\circ = {}^\circ K_2$. Pak síť $K = (S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2, F_1 \cup F_2)$, $D = K_1^\circ = {}^\circ K_2$ a proces p definovaný předpisem

$$p(x) = p_i(x) \overset{def}{\iff} x \in K_i, \ i=1,2$$

splňují tvrzení lemmy.

Příklad 7



Definice 9

Nechť p_1, p_2, p jsou procesy splňující Lemmu 2. Proces p se nazývá kompozicí procesů p_1 a p_2. Kompozici procesů zapisujeme

$$p = p_1 \circ p_2$$

Tvrzení 6

Nechť $p: K \to \Sigma$ je proces a nechť D je S-řez množiny K. Nechť $p^- = p|D^-$ a $p^+ = p|D^+$. Pak p^- a p^+ jsou procesy a $p = p^- \circ p^+$

Tvrzení 7

Nechť p_1, p_2, p_3 jsou procesy, pro které jsou definovány $p_1 \circ p_2$ a $p_2 \circ p_3$. Pak

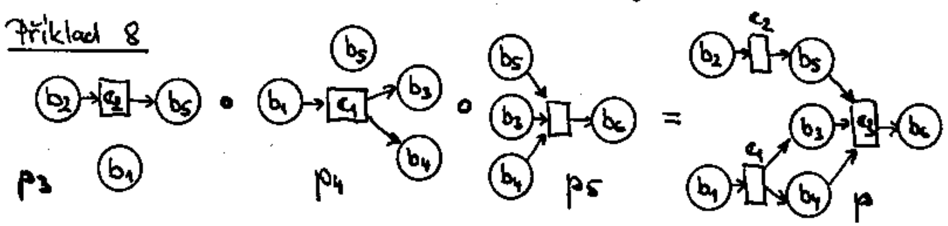
$$p_1 \circ (p_2 \circ p_3) = (p_1 \circ p_2) \circ p_3$$

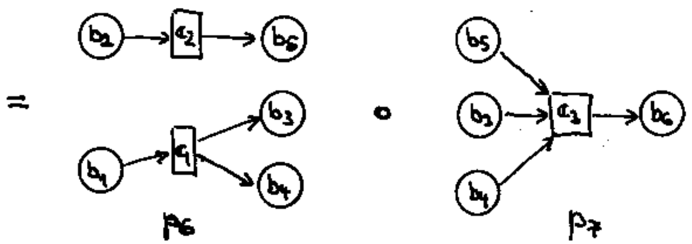
Proces se nazývá elementární, jestliže popisuje jednoduchý krok. Procesy jsou rozložitelné na konečně mnoho element. procesů

Definice 10

Proces $p: K \to \Sigma$ je elementární, jestliže $S_K = {}^\circ K \cup K^\circ$

Příklad 8





p_3, p_4, p_5 nebo p_6, p_7 jsou elementární procesy

Tvrzení 8

(1) $p: K \to \Sigma$ je elementární proces $\Leftrightarrow$ $p({}^\circ K)[p(T_K)\rangle p(K^\circ)$ je krok

(2) Jestliže $p: K \to \Sigma$ je elementární, pak $\forall t_1, t_2 \in T_K : t_1 \ \underline{co}\ t_2$

Definice 11

Proces $p: K \to \Sigma$ se nazývá prázdný, jestliže $T_K = \emptyset$.

Tvrzení 9

(1) Každý prázdný proces je elementární

(2) Je-li p' prázdný proces a je-li definováno $p \circ p'$ (nebo $p' \circ p$), pak $p = p \circ p'$ (nebo $p = p' \circ p$)

Theorem 7

Je-li $p: K \to \Sigma$ process, pak existuje konečně mnoho neprázd. elementárních procesů $p_1, p_2, \dots, p_n$ takových, že

$$\boxed{p = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n}$$

Důkaz.

Existuje celé číslo m ohraničující počet přechodů každého řetězce množiny K. Je-li $m = 0$, pak p je prázdný. Jestliže nejdelší řetězec má $m+1$ přechodů, pak p je rozložitelný na p' a p'' tak, že $p = p' \circ p''$, p' obsahuje $(m-1)$ přechodů a p'' je elementární neprázdný proces. Dále indukcí.

3.5 Procesy a case grafy

Budeme hledat vztah mezi procesy a cestami case grafu

Lemma 3

Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém. Proces $p: K \to \Sigma$ je elementární proces, právě když existuje hrana $v = (c_1, G, c_2)$ grafu Φ_Σ taková, že $p({}^\circ K) = c_1$, $p(K^\circ) = c_2$ a $p(T_K) = G$.

Důkaz Jestliže $p: K \to \Sigma$ je elementární proces, pak $p({}^\circ K)[p(T_K)\rangle\, p(K^\circ)$ je krokem Σ a $(p({}^\circ K), p(T_K), p(K^\circ))$ je hranou grafu Φ_Σ. Naopak, je-li (c_1, G, c_2) hrana Φ_Σ, pak $c_1 [G\rangle c_2$. Nechť $K = (c_1 \cup c_2, G, F_\Sigma \cap (c_1 \cup c_2 \cup G)^2)$. Pak $id: K \to \Sigma$ je elementární proces.

Definice 12

Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém.

(1) Je-li v hrana grafu Φ_Σ, pak $\underset{\sim}{v}$ označuje proces odpovídající hraně v. $\underset{\sim}{v}$ se nazývá procesem hrany v; v je hranou procesu $\underset{\sim}{v}$

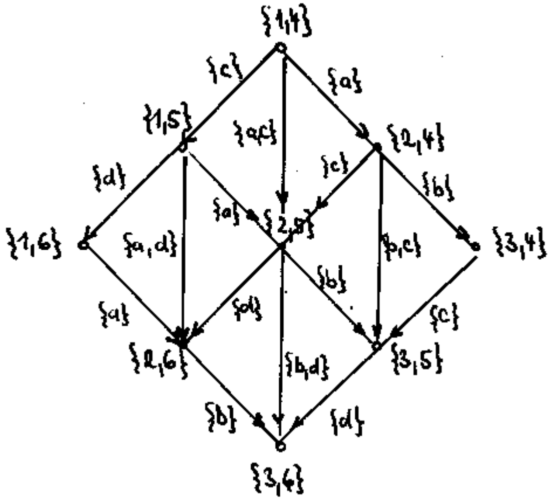
(2) Nechť $v_1, v_2, \dots, v_n$ jsou hrany a $w = v_1 v_2 \dots v_n$ je cesta v Φ_Σ. Pak $\underset{\sim}{w} = \underset{\sim}{v_1} \circ \underset{\sim}{v_2} \circ \dots \circ \underset{\sim}{v_n}$ se nazývá procesem cesty w; w je cestou procesu $\underset{\sim}{w}$.

(3) Pro $v = (c_1, G, c_2)$ a $e \in G$ nechť $t(v,e) = \underset{\sim}{v}^{-1}(e)$ a

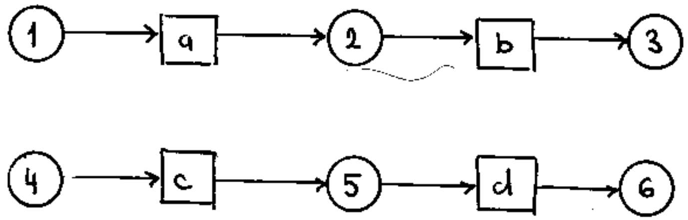
$T(v) = \{t(v,e) \mid e \in G\}$

$t(v,e)$ a $T(v)$ označují jednoduchý přechod, resp. množinu přechodů odpovídající výskytové síti.

Příklad 11



p =



Proces a (část) case grafu:

Každá z 13 cest v grafu z {1,4} do {3,6} odpovídá procesu p

Definice 13

Nechť Σ je C/E systém, $c_1, c_2, c_3 \in C_\Sigma$ a $G_1, G_2 \subseteq E_\Sigma$.

(1) Jestliže $u_1 = c_1 G_1 c_2$, $u_2 = c_2 G_2 c_3$ a $v = c_1 (G_1 \cup G_2) c_3$ jsou hrany case grafu Φ_Σ, pak cesta $u_1 u_2$ se nazývá <u>dekompozice</u> cesty v a v se nazývá <u>unifikací</u> cesty $u_1 u_2$.

(2) Nechť w, w' jsou cesty v Φ_Σ. w' se nazývá <u>permutací</u> cesty w, jestliže existují cesty $u_1, \dots, u_4$ takové, že $w = u_1 u_2 u_3$, $w' = u_1 u_4 u_3$ a u_4 je dekompozicí nebo unifikací cesty u_2.

(3) Nechť $w_1, w_2, \dots, w_n$ jsou cesty v Φ_Σ. $(w_1, \dots, w_n)$ se nazývá <u>permutační posloupností</u>, jestliže pro $i = 1, \dots, n-1$ je cesta w_{i+1} permutací cesty w_i.

Tvrzení 10

Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém, $c_1, c_2, c_3 \in C_\Sigma$ a nechť $G_1, G_2 \subseteq E_\Sigma$ jsou disjunktní a neprázdné.

(1) Jestliže $v = c_1 (G_1 \cup G_2) c_2$ je hrana v Φ_Σ, pak existují dekompozice cesty v ve tvaru $c_1 G_1 c G_2 c_2$ pro nějaké $c \in C_\Sigma$.

(2) Nechť $u_1 = c_1 G_1 c_3$ a $u_2 = c_3 G_2 c_2$ jsou hrany grafu Φ_Σ a nechť $\underset{\sim}{u_1} \circ \underset{\sim}{u_2} : K \to \Sigma$.

Pak

$$\forall t_1, t_2 \in T_K : t_1 \underline{co}\, t_2 \iff c_1 (G_1 \cup G_2) c_2 \text{ je hrana v } \Phi_\Sigma$$

<u>D (ad 2)</u> $\forall t_1, t_2 \in T_K : t_1 \underline{co}\, t_2$ právě když existuje elem. proces $p : K \to \Sigma$, pro který $p({}^\bullet K) = c_1$, $p(K^\bullet) = c_2$ a $p(T_K) = G_1 \cup G_2$ právě když $c_1 (G_1 \cup G_2) c_2$ je hrana v Φ_Σ (viz Lemma 3)

Teorem 8

Dvě cesty w, w' v grafu Φ_Σ přísluší stejnému procesu právě když existují permutační posloupnost z w do w'.

4. Vlastnosti systému

4.1. Synchronizační vzdálenosti

Důležitou vlastností systému je stupeň závislosti mezi výskyty jeho událostí t.j. jak je výskyt jedné události závislý na výskytu jiné události.

Např. v příkladu „změn ročních období" události „konec zimy" a „začátek jara" silně sudedny – silně synchronizovány ; říkáme, že koincidují.

Jiné případy závislosti 2 událostí:

- události alternují
- události jsou paralelní (concurrent)
- události se mohou vyskytnout v lib. pořadí
- události jsou zcela nezávislé

V této kapitole zavedeme míru synchronizace událostí. Budeme uvažovat obecné dvojice množin událostí: $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$. Pozorujme, jak často se události mn. E_1 a události mn. E_2 objevují v každém procesu systému. Absolutní rozdíl jejich vzájemných výskytů nazýváme <u>variancí</u> E_1 a E_2 v procesu p. Supremum variancí ve všech procesech systému se nazývá <u>synchronizační vzdálenost</u> $\sigma(E_1, E_2)$ množin E_1 a E_2. Dá se ukázat, že σ má vlastnost <u>metriky</u>. Tedy, synchr. vzdálenost je prostředkem pro získání kvantitativní informace o dynamickém chování systému, aniž je třeba zavádět pojem „času".

Zavedeme nejprve „míru μ pro počítání událostí". Uvažujme $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$, proces $p: K \to \Sigma$ a počítejme prvky $p^{-1}(E_1)$ a $p^{-1}(E_2)$. Protože nás zajímají největší rozdíly výskytů událostí z E_1 a E_2, spočítáme pro všechny S-řezy D_1, D_2 sítě K prvky $p^{-1}(E_1)$ a $p^{-1}(E_2)$ mezi D_1 a D_2. K tomu účelu, pro všechny $M \subseteq T_K$ položme

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mu(M, D_1, D_2) = |M \cap D_1^+ \cap D_2^-| & \text{je-li } D_1 < D_2 \text{ a} \\ \mu(M, D_1, D_2) = |M \cap D_1^- \cap D_2^+| & \text{je-li } D_2 < D_1 \end{array}}$$

Problém je však v tom, že S-řezy mohou být nesrovnatelné. Proto:

<u>Definice 1</u>

Nechť K je výskytová síť a D_1, D_2 její dva S-řezy. Nechť $M \subseteq T_K$ je konečná množina. Pak nechť

$$\boxed{\mu(M, D_1, D_2) = |M \cap D_1^+ \cap D_2^-| - |M \cap D_1^- \cap D_2^+|}$$

Pro takto zavedené μ platí: $\mu(M, D_1, D_2) = -\mu(M, D_2, D_1)$

<u>Definice 2</u>

Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém. Označme Π_Σ množinu všech jeho procesů. Dále nechť $p: K \to \Sigma \in \Pi_\Sigma$ a $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$. Pak

$$V(p, E_1, E_2) = \max\{\mu(p^{-1}(E_1), D_1, D_2) - \mu(p^{-1}(E_2), D_1, D_2) \mid D_1, D_2 \in sl(K)\}$$

se nazývá <u>variancí mn. událostí E_1 a E_2 v procesu p</u>.

<u>Tvrzení 1</u>

$$\forall p \in \Pi_\Sigma \ \forall E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma : V(p, E_1, E_2) = V(p, E_2, E_1)$$

Definice 3

Nechť Σ je C/E systém (bezkontaktní) a nechť $E_1, E_2 \subseteq E$. *

$$\boxed{\sigma(E_1,E_2) = \sup \{\nu(p,E_1,E_2) \mid p \in \Pi_\Sigma\}}$$

se nazývá <u>synchronizační vzdálenost mn. událostí</u> E_1 a E_2.

4.1.1. Grafická reprezentace synchronizační vzdálenosti

Pro reprezentaci s. vzdálenosti množin událostí E_1 a E_2 zavedeme nové místo s: ${}^\bullet s = E_1 \wedge s^\bullet = E_2$. V každém případu c systému Σ obsahuje s určitý počet značek (dostatečně mnoho, aby nebránilo provedení událostí). Kdykoli se provede událost z E_1, resp. E_2, počet značek se zvětší, resp. zmenší o 1. Pak $\sigma(E_1,E_2)$ supremum přes největší změny počtu značek v místě s při provádění sítě.

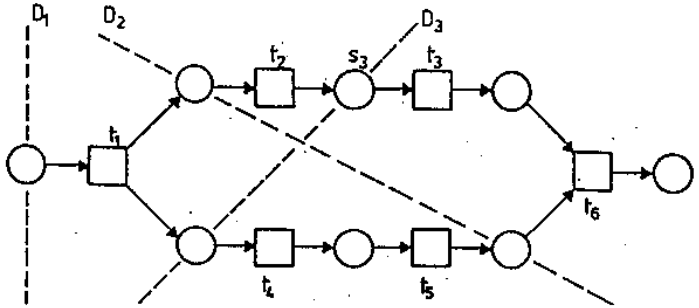
Graficky jsou s a nové hrany sítě kresleny čárkovaně. Místo s má označení „$\sigma = x$", jestliže $\sigma(E_1,E_2) = x$

Příklad grafické reprezentace syn. vzdálenosti mn. událostí C/E systému z Př. 3 je znázorněn v příkladu 4.

Pozn. Grafickou reprezentací synch. vzdálenosti v C/E síti získáme P/T síť, ve které nová místa s mají neom. kapacitu: $\quad K(s) = \omega$

* Maximální počet [illegible] událostí z E_1 „[illegible]" [illegible] z E_2.

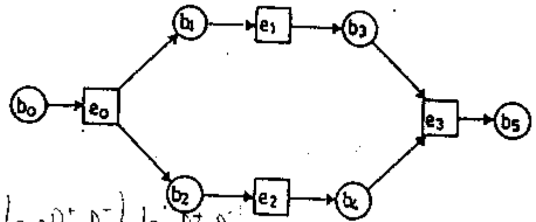
Příklad 1 (výpočet μ)



$\mu(\{t_1\},D_1,D_2) = 1$
$\mu(\{t_4,t_5\},D_2,D_3) = -2$
$\mu(\{t_2,t_3\},D_2,D_3) = 1$
$\mu(\{t_2,t_3\},D_3,D_2) = -1$
$\mu(\{t_3,t_4\},D_3,D_2) = 0$

Příklad 2 (variance mn. událostí)

$\nu(p,\{e_0\},\{e_3\}) = 1$
$\nu(p,\{e_0\},\{e_1,e_2\}) = 2$
$\nu(p,\{e_0,e_1\},\{e_2\}) = 2$
$\nu(p,\{e_1\},\{e_2\}) = 2$

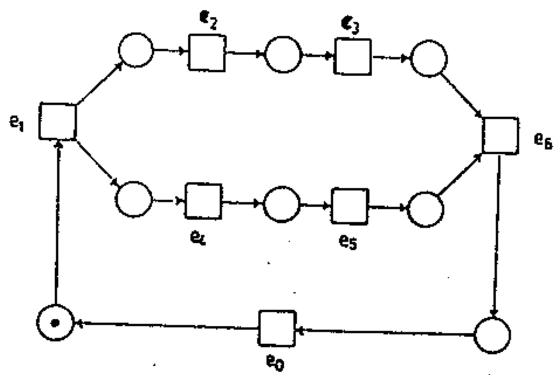


$D_1 = \{b_1, b_4\}$
$D_2 = \{b_2, b_3\}$

$$\nu(p,\{e_1\},\{e_2\}) = (\underbrace{1}_{|e_1 \cap D_1^+ \cap D_2^-|} - \underbrace{0}_{|e_1 \cap D_1^- \cap D_2^+|}) - (\underbrace{0}_{|e_2 \cap D_1^+ \cap D_2^-|} - \underbrace{1}_{|e_2 \cap D_1^- \cap D_2^+|}) = 1 - (-1) = 2$$

→ [illegible] max [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

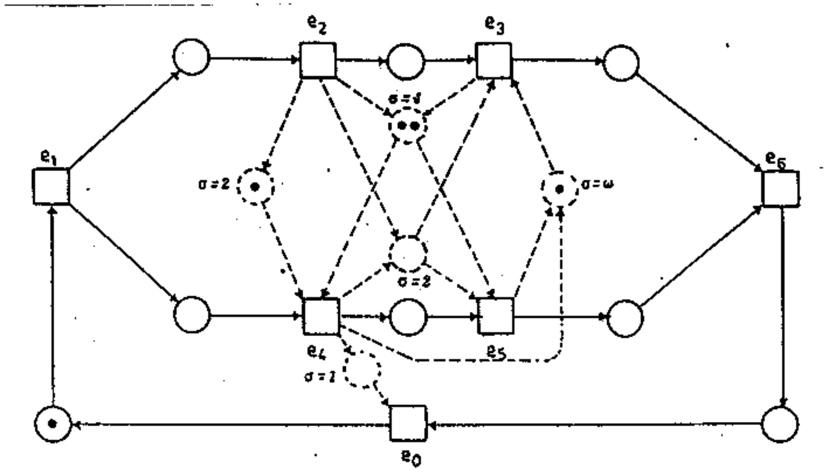
Příklad 3 (synchronizační vzdálenost)



$\sigma(\{e_1\},\{e_0\}) = 1$
$\sigma(\{e_2\},\{e_4\}) = 2$
$\sigma(\{e_2,e_3\},\{e_4,e_5\}) = 4$
$\sigma(\{e_2,e_4\},\{e_3,e_5\}) = 2$
$\sigma(\{e_4,e_5\},\{e_3\}) = \omega$

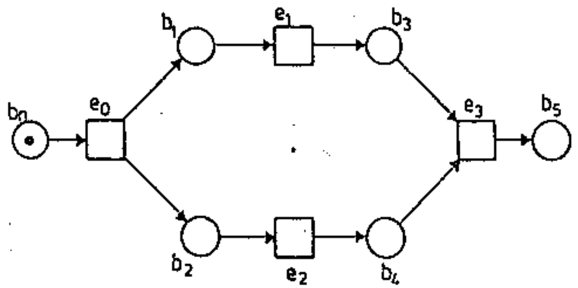
(*)

Příklad 4

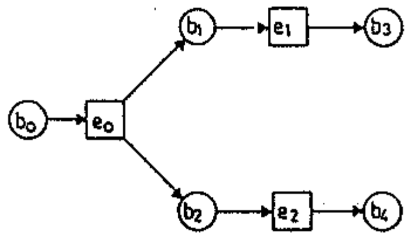


Graphical representation of the synchronic distances ~~given in Fig. 12~~ {from ex. 3.

Příklad 5



C/E-system Σ



process p *of* Σ

A *C/E*-system in which the two events e_1 and e_2 occur concurrently ($\sigma(e_1, e_2) = 2$)

4.1.2. Některé speciální synchronizační vzdálenosti

Zřejmě, je-li $E_1 = E_2$, pak $\sigma(E_1, E_2) = 0$ a naopak, je-li $\sigma(E_1, E_2) = 0$, pak $E_1 = E_2$. Speciálně $e_1 = e_2 \Leftrightarrow \sigma(e_1, e_2) = 0$ události e_1 a e_2 koincidují.

Uvažujme nyní dva C/E systémy v příkladech 5 a 6. Události e_1 a e_2 jsou v Σ paralelní – nezávislé. Podle definice je $\sigma_\Sigma(e_1, e_2) = 2$.

V příkladu 6 je zaveden „řídicí mechanismus", který neumožňuje, aby e_1 a e_2 byly paralelní; mohou však proběhnout v lib. pořadí. $p_i^{-1}(e_1)$ a $p_i^{-1}(e_2)$, $i = 1, 2$ leží v jednom řetězci v procesech p_1 a p_2 systému Σ', kdežto v Σ jsou v relaci co. Koncepční rozdíl mezi Σ a Σ' je vyjádřen právě synchr. vzdáleností e_1 a e_2. V příkladě 6 je

$$\sigma(e_1, e_2) = 1$$

V příkladě 7 mají odpovídající dvojice událostí systému Σ_1 a Σ_2 stejnou synch. vzdálenost:

$$\sigma(e_1, e_2) = \sigma(e_1, e_4) = \omega, \quad \sigma(e_1, e_3) = \sigma(e_2, e_4) = 1$$

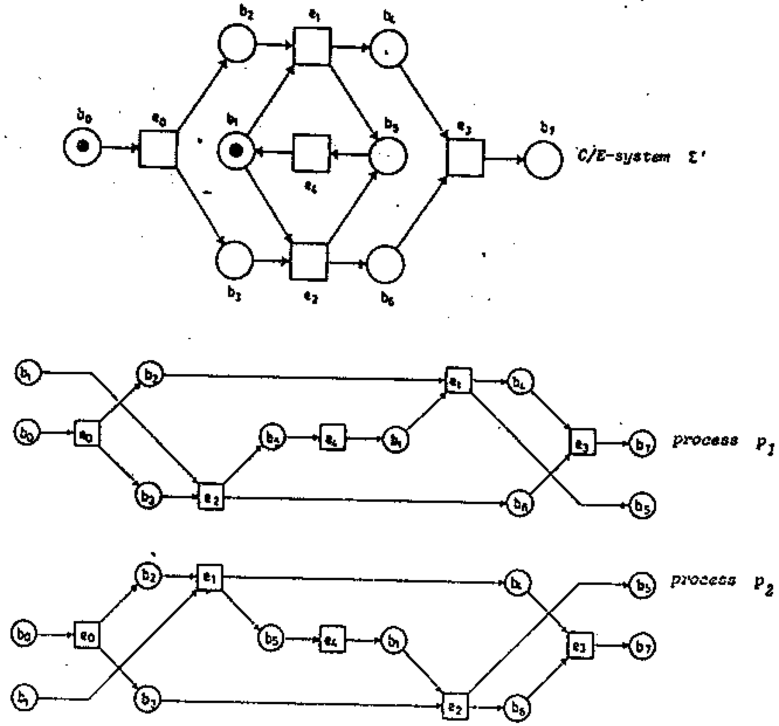
v obou systémech.

Intuitivně však cítíme, že Σ_2 je více synchronizován. To je vyjádřitelné synch. vzdáleností množin $\{e_1, e_2\}$ a $\{e_3, e_4\}$:

$$\sigma(\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}) = 2 \quad \text{v} \quad \Sigma_1, \text{ ale}$$

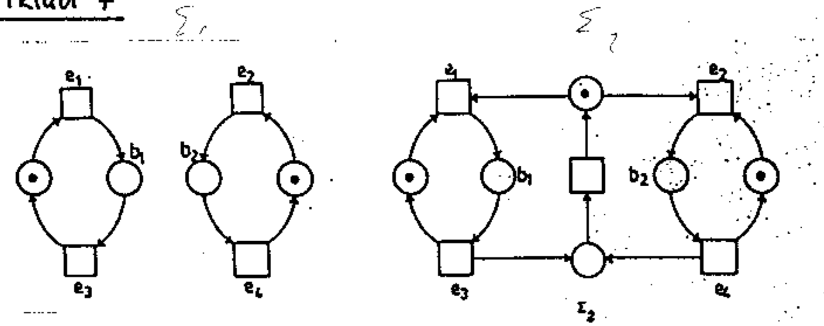
$$\sigma(\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}) = 1 \quad \text{v} \quad \Sigma_2$$

Příklad 6

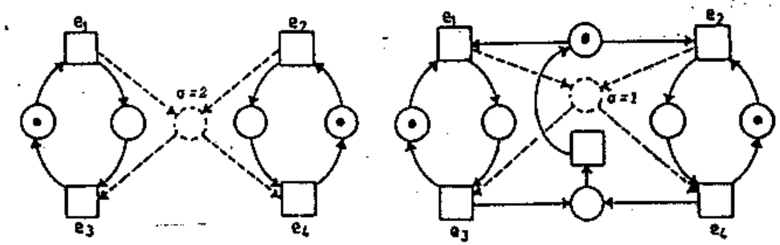


A C/E-system in which e_1 and e_2 occur in some (arbitrary) order ($\sigma(e_1, e_2) = 1$)

Příklad 7

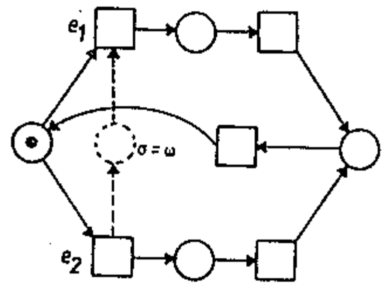


Two C/E-systems Σ_1, Σ_2 with $\sigma_{\Sigma_1}(e, e') = \sigma_{\Sigma_2}(e, e')$ for $e, e' \in \{e_1, \ldots, e_4\}$



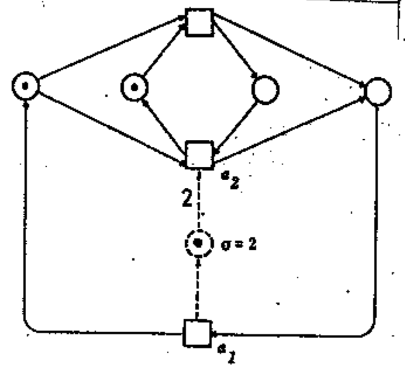
Other synchronic distances in the systems ~~of Fig. 46~~ Σ_1, Σ_2

Příklad 8



An infinite synchronic distance because of a conflict

(a)



A weighted synchronic distance

(b)

V příkladu 8a. jsou události e_1 a e_2 neomezeně často v konfliktu; jejich synch. vzdálenost je nekonečná:

$$\sigma(e_1 e_2) = \omega$$

V příkladu 8b je také $\sigma(e_1, e_2) = \omega$. Na rozdíl od (a) jsou však výskyty e_1 a e_2 závislé na sobě; e_1 se provádí 2x častěji než e_2. K vyjádření tohoto rozdílu je třeba zobecnění syn. vzdálenosti na tzv. váženou synchr. vzdálenost (v graf. reprezentaci mají přidané hrany celočíselnou váhu).

4.2. Některé kvantitativní vlastnosti synch. vzdálenosti

Theorem 1

Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém a nechť $E_1, E_2, E_3 \subseteq E_\Sigma$. Pak

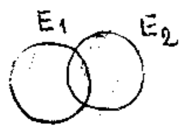
(i) $\sigma(E_1, E_2) = 0 \iff E_1 = E_2$
(ii) $\sigma(E_1, E_2) = \sigma(E_2, E_1)$
(iii) $\sigma(E_1, E_2) \leq \sigma(E_1, E_3) + \sigma(E_3, E_2)$

Pozn. Synchr. vzdálenost je tedy metrikou na množinách událostí.

Theorem 2

Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém a $E_1 E_2 \subseteq E_\Sigma$.

Pak $\boxed{\sigma(E_1, E_2) = \sigma(E_1 \setminus E_2, E_2 \setminus E_1)}$



4.3. Synchr. vzdálenosti v sekvenčních systémech

Definice 4

C/E systém Σ se nazývá stavový stroj (state machine), jestliže

(1) $\forall e \in E_\Sigma : \lvert {}^\bullet e \rvert = \lvert e^\bullet \rvert = 1$
(2) $\forall c \in C_\Sigma : \lvert c \rvert = 1$

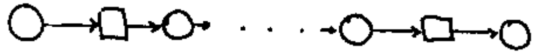
Theorem 3

Nechť Σ je stavový stroj a nechť $e_1, e_2 \in E_\Sigma$.

Pak $\boxed{\sigma(e_1, e_2) \in \{0, 1, \omega\}}$

Důkaz.

Každý proces systému Σ je tvořen řetězcem tvaru



Předpokládejme, že existuje proces $p : K \to \Sigma$ se dvěma přechody $t_1, t_2 \in T_K$ takovými, že pro $i = 1$ nebo $i = 2$

$$p(t_1) = p(t_2) = e_i \quad a$$
$$\forall t \in t_1^\bullet \cap {}^\bullet t_2 : p(t) \neq e_i$$

Pak pro $p_1 = p \mid ({}^\bullet t_1^\bullet \cap {}^\bullet t_2^\bullet)$ je $p_n = \underbrace{p_1 \circ \dots \circ p_1}_{n\text{-krát}}$ také proces a $\nu(p_n, \{e_1\}, \{e_2\}) \geq n$. Tedy $\sigma(e_1, e_2) = \omega$.

Jinak je pro všechny procesy p: $\nu(p, e_1, e_2) \leq 1$ a tedy $\sigma(e_1, e_2) \leq 1$.

4.4. Synchr. vzdálenost v cyklických systémech

Definice 5

Nechť Σ je bezkontaktní C/E systém, $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$ a nechť $p \in \Pi_\Sigma$. Definujeme

$$\boxed{\begin{aligned} \nu'(p, E_1, E_2) &= \big| |p^{-1}(E_1)| - |p^{-1}(E_2)| \big| \quad \text{a} \\ \sigma'(E_1, E_2) &= \sup\{\nu'(p, E_1, E_2) \mid p \in \Pi_\Sigma\} \end{aligned}}$$

Tvrzení 1

Pro lib. C/E Σ a $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$ platí:

$$\boxed{\sigma'(E_1, E_2) \leq \sigma(E_1, E_2)}$$

Např. v příkladu 5 je $\sigma'(\{e_1\}, \{e_2\}) = 1 < \sigma(\{e_1\}, \{e_2\}) = 2$

Theorem 4

Nechť Σ je bezkontaktní a ~~živý~~ cykl. systém. Pak pro všechny $E_1, E_2 \subseteq E_\Sigma$ je

$$\boxed{\sigma'(E_1, E_2) = \sigma(E_1, E_2)} .$$

Důkaz:

konstruovat formule výr. logiky a vyhodnocovat jejich pravd. hodnoty

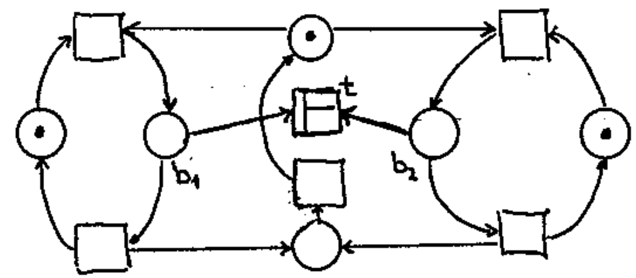
4.5. Fakta (facts)

S využitím podmínek C/E systému je možno konstruovat formule výrokové logiky. Tyto formule budou pravdivé, či nepravdivé v závislosti na tom, ve kterém případu se systém nachází. Zvláštní zájem zaslouží „tautologie" (kontradikce), které popisují invariantní vlastnosti systému. Ukážeme, jak lze reprezentaci a vyhodnocení těchto formulí začlenit do „síťového kalkulu".

Uvažujme C/E systém Σ_1 z příkladu 7. Přidejme navíc požadavek, aby podmínky b_1 a b_2 nikdy neplatily současně. Toho lze dosáhnout konstrukcí systému Σ_2 v témže příkladě. Tato nová vlastnost systému může být vyjádřena zavedením nového přechodu t takového, že

$${}^\bullet t = \{b_1, b_2\}, \; t^\bullet = \emptyset ,$$

který není proveditelný v žádném případu systému Σ_2



Nejprve budeme studovat vztahy mezi formulemi obsahujícími podmínky (např. $\neg(b_1 \wedge b_2)$) a prováděním událostí. K tomu účelu uvažujme b jako prvotní (atomickou) formuli, která je pravdivá v daném případu c právě když b patří do c. Pak můžeme

Definice 6

Nechť Σ je C/E systém.

(1) Množina A_Σ formulí (výrokové logiky) nad B_Σ je nejmenší množina, pro kterou

(a) $B_\Sigma \subseteq A_\Sigma$

(b) $a_1, a_2 \in A_\Sigma \Rightarrow (a_1 \wedge a_2) \in A_\Sigma,\ (a_1 \vee a_2) \in A_\Sigma,$
$(a_1 \to a_2) \in A_\Sigma,\ (\neg a_1) \in A_\Sigma$

(2) V každém $c \in C_\Sigma$ přísluší každé formuli $a \in A_\Sigma$ hodnota $\hat{c}(a)$ definovaná valuací $\hat{c}: A_\Sigma \to \{0,1\}$:

$$
\begin{aligned}
b &\mapsto 1, \text{ jestliže } b \in c\\
b &\mapsto 0, \text{ jestliže } b \notin c\\
(a_1 \wedge a_2) &\mapsto \min(\hat{c}(a_1), \hat{c}(a_2))\\
(a_1 \vee a_2) &\mapsto \max(\hat{c}(a_1), \hat{c}(a_2))\\
(a_1 \to a_2) &\mapsto \hat{c}((\neg a_1) \vee a_2)\\
(\neg a_1) &\mapsto 1 - \hat{c}(a_1)
\end{aligned}
$$

(3) Dvě formule $a_1, a_2 \in A_\Sigma$ jsou ekvivalentní v Σ, jestliže pro vš. $c \in C_\Sigma$: $\hat{c}(a_1) = \hat{c}(a_2)$

Nyní ke každé události $e \in E_\Sigma$ přiřadíme formuli $a(e)$ tak, že pro vš. případy c platí: $a(e)$ platí právě když e není c-proveditelná.

Definice 7 Nechť Σ je konečný C/E systém a nechť $e \in E_\Sigma$.
Nechť ${}^\bullet e = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $e^\bullet = \{b'_1, b'_2, \dots, b'_m\}$. Pak

$$\boxed{a(e) : (b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n) \to (b'_1 \vee \dots \vee b'_m)}$$

Je-li ${}^\bullet e = \emptyset$, pak $a(e) : (b'_1 \vee \dots \vee b'_m)$, je-li $e^\bullet = \emptyset$, pak
$a(e) : \neg(b_1 \wedge b_2 \wedge \dots b_n)$

Lemma 1 Nechť Σ je konečný C/E systém. Pak pro každé $c \in C$
$a(e)$ platí v c právě když e není c-proveditelná, $e \in E$

Důkaz

$\hat{c}(a(e)) = 1 \Leftrightarrow \exists b \in {}^\bullet e$ kde $\hat{c}(b) = 0$ nebo $\exists b' \in e^\bullet$, $\hat{c}(b') = 1$
$\Leftrightarrow \exists b \in {}^\bullet e$ a $b \notin c$ nebo $\exists b' \in e^\bullet$ a $b' \in c \Leftrightarrow e$ není c-provedi[telná]

Ukázali jsme, jak spojovat formule s událostmi systému. Teď uvažujme, jak reprezentovat lib. pravd. formuli sestavenou z podmínek systému.

K tomu účelu obohatíme C/E systém o nové přechody, které nejsou proveditelné v žádném případu systému („dead" před). Proto neovlivní chování systému. S každým novým přechodem spojíme formuli $a(t)$, stejně jako pro události. $a(t)$ pak platí v systému Σ (platí pro každý jeho případ).
Takto je možné reprezentovat všechny platné formule pro Σ určitým počtem „mrtvých" přechodů. Tyto přechody nazýváme fakta.

Definice 8

Nechť Σ je C/E systém.

(1) Formule $a \in A_\Sigma$ se nazývá platnou v Σ, jestliže

$$\forall c \in C_\Sigma : \hat{c}(a) = 1$$

(2) Pro $B_1, B_2 \subseteq B_\Sigma$ nechť $t = (B_1, B_2)$ je nový přechod: ${}^\bullet t = B_1$ a $t^\bullet = B_2$. Přechod t se nazývá faktem systému Σ, jestliže t není proveditelný pro žádné $c \in C$

V grafické reprezentaci je fakt t označen přechodem $\boxed{F}$ (F - False).

Pro t je a(t) definována jako pro c: např. jestliže $^{\bullet}t = \{b_1, \dots, b_n\}$, $t^{\bullet} = \{b'_1, \dots, b'_m\}$ pak

$$a(t) = (b_1 \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_n) \to (b'_1 \vee b'_2 \vee \dots \vee b'_m)$$

Theorem 5

Nechť Σ je konečný C/E systém a nechť $a \in A_\Sigma$. Formule a je platná v Σ právě když existují fakta $t_1, t_2, \dots, t_k$ taková, že a je logicky ekvivalentní formuli

$$a(t_1) \wedge a(t_2) \wedge \dots \wedge a(t_n)$$

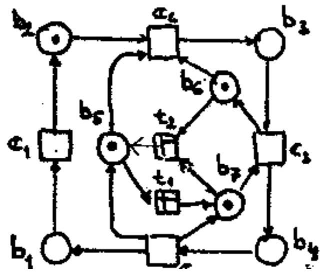
Důkaz: (s využitím KNF)

Problém: Jak reprezentovat formule, které platí jen pro některé případy systému

Pro $c \in C_\Sigma$ nechť c' označuje konjunkci všech podmínek tvořících c. Pak a platí pro případy $c_1, \dots, c_k$ lze popsat formulí

$$(c'_1 \wedge c'_2 \wedge \dots \wedge c'_k) \to a$$

Příklad 9 (Rozšíření systému z Př. 2/2 o dvě fakta)



4124~~4~~3354

BARVENÉ PETRIHO SÍTĚ

CPN – Coloured Petri Nets

Kurt Jensen (1981) – Aarhus – Dánsko

1. Úvod

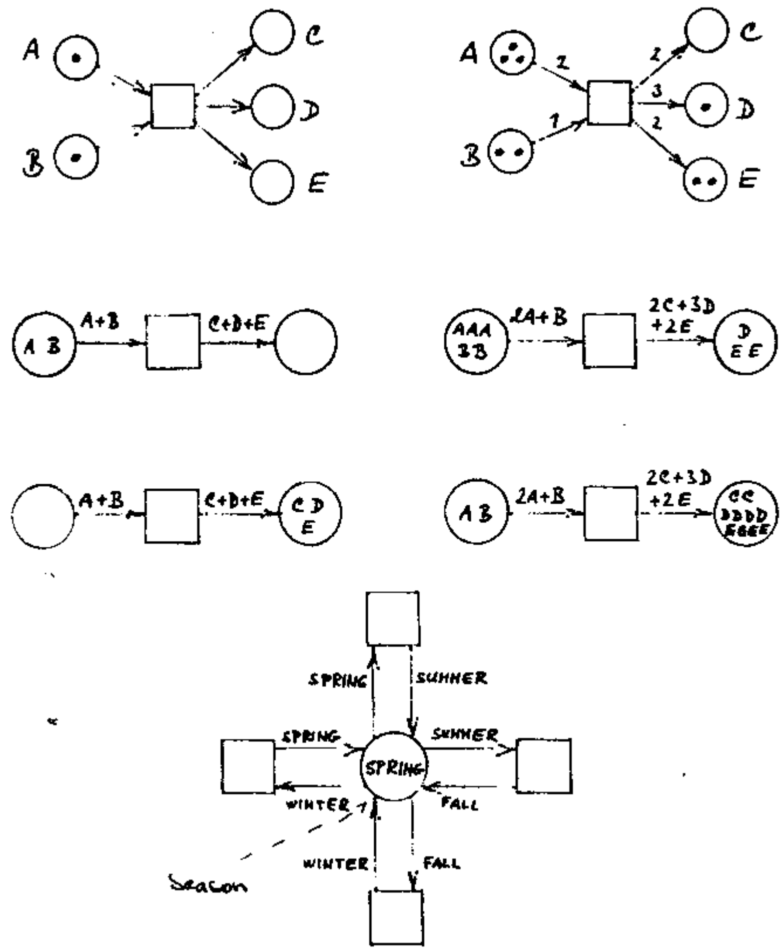
- Nevýhody klasických (P/T) Petriho sítí
- Charakteristika CPN, high-level PN
- CPN Design
- Aplikace

Monografie: Jensen K: Coloured Petri Nets, Vol. 1 – Basic concetps
Springer-Verlag 1992

2. Petriho sítě s individuálními značkami (tokens)

INDIVIDUAL TOKEN NETS

WITH CONSTANT ARROW LABELS



3. Neformální zavedení CPN

Uvažujme příklad popisu systému přidělování prostředků (zdrojů).

Systém je tvořen:
- 2 třídami procesů – procesy p, resp. q
- 3 typy zdrojů – R, S, T
- stavy procesů A, B, ..., E
- počátečním stavem

Vlastní činnost systému lze popsat P/T Petriho sítí:

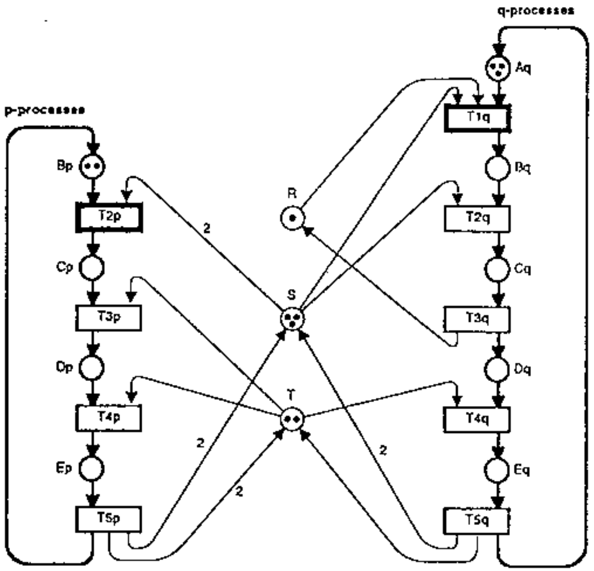


Fig. 1.3. PT-net describing the resource allocation system (initial marking M_0)

Nejprve „sloučíme" popis chování podobných procesů p a q. Budeme registrovat, který průchod „alokačním cyklem" daný proces provádí.

Model ve tvaru CPN zahrnuje 2 složky:

1. grafickou část – graf Petriho sítě
2. popisy – inskripci

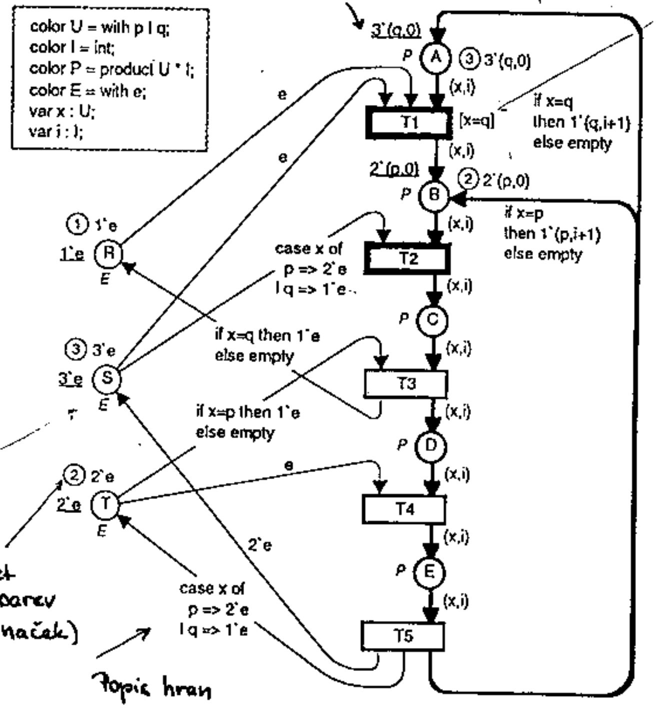
Inskripce, vyjádřená inskripčním jazykem, obsahuje:

- Deklaraci množin barev (coloured sets), t.j. datových typů
- Popis barvy místa
- Popis hran
- Počáteční značení
- strážní podmínky přechodů
- Jména míst a přechodů

Počáteční značení

Strážní podmínky

Deklarace



Popis barev

Počet barev (značek)

Popis hran

Fig. 1.7. CP-net describing the resource allocation system (initial marking M_0)

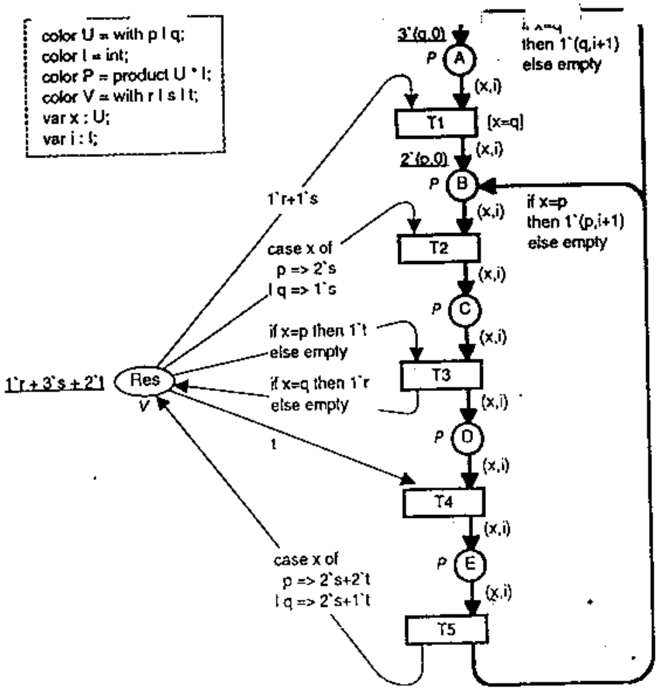


Fig. 1.11. A third CP-net describing the resource allocation system

```
color U = with p | q;
color S = with a | b | c | d | e;
color I = int;
color P = product U * S * I;
color R = with r | s | t;
fun Succ(y) = case y of a=>b | b=>c | c=>d | d=>e | e=>a;
fun Next(x,y,i) = (x, if (x,y) = (p,e) then b else Succ(y), if y=e then i+1 else i);
fun Reserve(x,y) = case (x,y) of (p,b)=>2`s | (p,c)=>1`t | (p,d)=>1`t
                   | (q,a)=>1`r+1`s | (q,b)=>1`s | (q,d)=>1`t | _=>empty;
fun Release(x,y) = case (x,y) of (p,e)=>2`s+2`t | (q,c)=>1`r | (q,e)=>2`s+1`t | _=>empty;
var x : U;
var y : S;
var i : I;
```

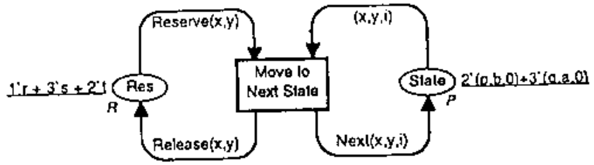


Fig. 1.12. A fourth CP-net describing the resource allocation system

DB je distribuována do n míst (sites); každé místo obsahuje kopii všech dat, o kterou se stará databázový manažer (DBM).

$DBM = \{d_1, d_2, \dots d_n\}$

$MES = \{(s,r) \mid s,r \in DBM \wedge s \neq r\}$ s - sender, r - receiver

$$Mes(s) = \sum_{r \in DBM \setminus \{s\}} 1'(s,r)$$

```
val n = 4;
color DBM = index d with 1..n declare ms;
color PR = product DBM * DBM declare mult;
fun diff(x,y) = (x<>y);
color MES = subset PR by diff declare ms;
color E = with e;
fun Mes(s) = mult'PR(1`s,DBM-1`s);
var s, r : DBM;
```

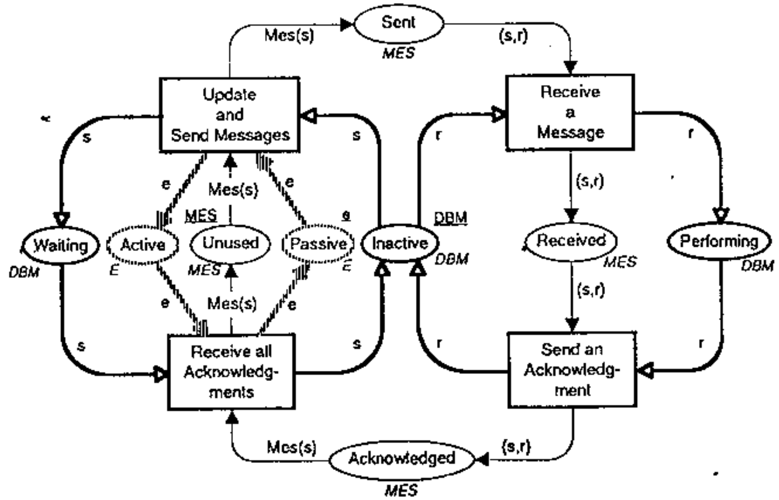
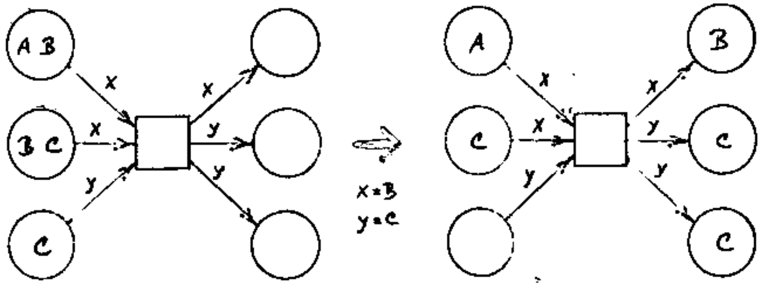
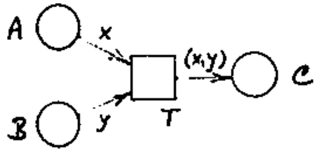


Fig. 1.13. CP-net describing the distributed data base

INDIVIDUAL TOKEN NETS

WITH VARIABLE ARROW LABELS

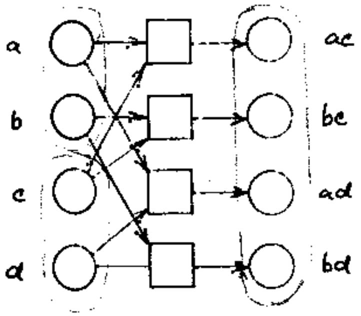




TYPEOF(A) = { a, b }

TYPEOF(B) = { c, d }

TYPEOF(C) = { a, b } x { c, d }



COLORED PETRI NETS

TOKEN HAS A COLOR – INSTANCE OF DATA TYPE

EXPRESSIONS OF ARCS – COMBINATION OF CONSTANTS, VARIABLES AND OPERATIONS

INSCRIPTION LANGUAGE – DECLARATIONS AND DEFINITIONS OF DATA TYPES, VARIABLES, OPERATIONS (FUNCTIONS), GUARDS.

Every expression on arc evaluates to multiset of colors.

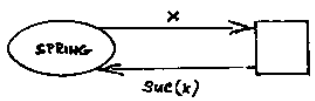
Multiset constructor: $n_1`c_1 + n_2`c_2 + \dots + n_n`c_n$

$n_1, n_2, \dots, n_n$ are constants, variables or functions which evaluate to positive integers,

$c_1, c_2, \dots, c_n$ are constants, variables or functions which evaluate to colors.

Examples: if x = C then 3\`D else 4\`E + 5\`F

2\`(x+y) + 3\`1



suc (SPRING) = SUMMER
suc (SUMMER) = FALL
suc (FALL) = WINTER
suc (WINTER) = SPRING

FORMÁLNÍ DEFINICE CPN

Multimnožiny

Definice 1

Multimnožina m nad množinou S je funkce m,

$$m: S \to N$$

$m(s)$ značí počet výskytů prvků s v multimnožině m.
Obvykle reprezentujeme multimnožinu m formální sumou:

$$\sum_{s \in S} m(s)`s$$

Symbolem S_{MS} značíme množinu všech multimnožin nad S.
Jestliže $m(s) \neq 0$, pak říkáme, že s patří do m a píšeme $s \in m$

Pro multimnožiny je definována operace sjednocení, skalární multiplikace, predikáty $= \neq \leq \geq$, kardinalita $|m|$ a je-li $m_1 \leq m_2$ také rozdíl $m_2 - m_1$

Struktura (nehierarchické) barvené Petriho sítě

Značení:

- prvky typu T (množina všech prvků T) – T
- typ proměnné v – Type (v)
- typ výrazu expr – Type (expr)
- množina proměnných výrazu expr – Var (expr)
- navázání množiny proměnných V – přiřazení každé $v \in V$ prvku $b(v) \in Type(v)$

Hodnota získaná vyhodnocením výrazu expr při navázání b – expr <b>

množina {true, false} – $\mathbb{B}$
Je-li Vars množina proměnných, pak $Type(Vars) = \{Type(v) \mid v \in Vars\}$

Definice 2

Nehierarchická barvená Petriho síť CPN je n-tice

$$CPN = (\Sigma, P, T, A, N, C, G, E, I), \text{ kde}$$

(1) Σ je množina neprázdných typů nazývaných množinami barev

(2) P je konečná množina míst

(3) T je konečná množina přechodů

(4) A je konečná množina hran, pro kterou
$$P \cap T = P \cap A = T \cap A = \emptyset$$

(5) N je uzlová funkce (node funtion):
$$N: A \to P \times T \cup T \times P$$

(6) C je funkce barev (colour function)
$$C: P \to \Sigma$$

(7) G je funkce strážních podmínek (guard function)
$$G: T \to EXPR \quad \text{(EXPR – množina výrazů)}:$$
$$\forall t \in T: (Type(G(t)) = \mathbb{B} \land Type(Var(G(t))) \subseteq \Sigma)$$

(8) E je funkce hranových výrazů (arc expression function)
$$E: A \to EXPR \quad (p(a) \text{ je místo v } N(a))$$
$$\forall a \in A: (Type(E(a)) = C(p(a))_{MS} \land Type(Var(E(a))) \subseteq \Sigma)$$

(9) I je inicializační funkce
$$I: P \to CEXPR \quad \text{(CEXPR – množina uzavřených výrazů)}$$
$$\forall p \in P: (Type(I(p)) = C(p)_{MS})$$

HIERARCHIES IN PETRI NETS

(ACCORDING TO HUBER, JENSEN, SHAPIRO)

WHY? MODELLING AND DESIGN OF LARGE SYSTEMS IN SINGLE LEVEL IS IMPOSSIBLE

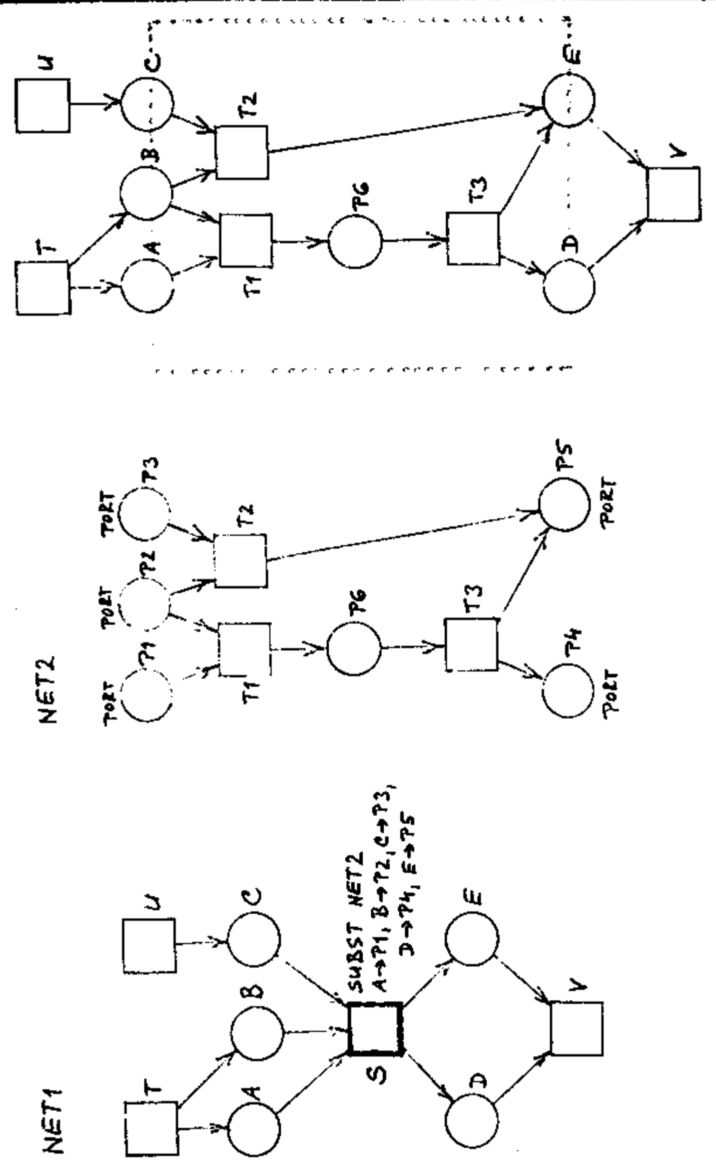
HIERARCHIES IN PN's :

- SUBSTITUTION TRANSITIONS
- SUBSTITUTION PLACES
- INVOCATION TRANSITIONS
- FUSION SETS

SUBSTITUTION : NODE REPRESENTS SUBNET

INVOCATION : WHEN INVOCATION TRANSITION FIRES, NEW COPY OF INVOCATED NET IS CREATED AND RUNS UNTIL EXIT PLACE IS MARKED.

SUBSTITUTION TRANSITION



(i) $\Sigma = \{U, I, P, E\}$.

(ii) $P = \{A, B, C, D, E, R, S, T\}$.

(iii) $T = \{T1, T2, T3, T4, T5\}$.

(iv) A = {AtoT1, T1toB, BtoT2, T2toC, CtoT3, T3toD, DtoT4, T4toE, EtoT5, T5toA, T5toB, RtoT1, StoT1, StoT2, TtoT3, TtoT4, T3toR, T5toS, T5toT}.

(v) N(a) = (SOURCE,DEST) if a is in the form SOURCEtoDEST.

(vi)
$$C(p) = \begin{cases} P & \text{if } p \in \{A, B, C, D, E\} \\ E & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(vii)
$$G(t) = \begin{cases} x=q & \text{if } t = T1 \\ \text{true} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(viii)
$$E(a) = \begin{cases} e & \text{if } a \in \{RtoT1, StoT1, TtoT4\} \\ 2`e & \text{if } a = T5toS \\ \text{case } x \text{ of } p{=}{>}2`e \mid q{=}{>}1`e & \text{if } a \in \{StoT2, T5toT\} \\ \text{if } x{=}q \text{ then } 1`e \text{ else empty} & \text{if } a = T3toR \\ \text{if } x{=}p \text{ then } 1`e \text{ else empty} & \text{if } a = TtoT3 \\ \text{if } x{=}q \text{ then } 1`(q,i{+}1) \text{ else empty} & \text{if } a = T5toA \\ \text{if } x{=}p \text{ then } 1`(p,i{+}1) \text{ else empty} & \text{if } a = T5toB \\ (x,i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(x)
$$I(p) = \begin{cases} 3`(q,0) & \text{if } p=A \\ 2`(p,0) & \text{if } p=B \\ 1`e & \text{if } p=R \\ 3`e & \text{if } p=S \\ 2`e & \text{if } p=T \\ \emptyset & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Fig. 2.2. The CP-net from Fig. 1.7 represented as a many-tuple

<u>~~Další~~ (pracovní) funkce:</u> Nechť $X = P \cup T$

$p: A \to P$ – <u>místo</u> $N(a)$

$t: A \to T$ – <u>přechod</u> $N(a)$

$s: A \to X$ – <u>source</u> : $s(a) = x_1$ jestliže $N(a) = (x_1, x_2)$

$d: A \to X$ – <u>destination</u> : $d(a) = x_2$ – " –

$A: P \times T \cup T \times P \to A_s$ – <u>spojující hrany</u> : $A(x_1, x_2) = \{a \in A \mid N(a) = (x_1, x_2)\}$

nebo

$A: X \to X_s$ – <u>incidující hrany</u>

$$A(x) = \{a \in A \mid \exists x' \in X : (N(a) = (x, x') \vee N(a) = (x', x))\}$$

$In: X \to X_s$ – <u>vstupní uzly</u>

$$In(x) = \{x' \in X \mid \exists a \in A : N(a) = (x', x)\}$$

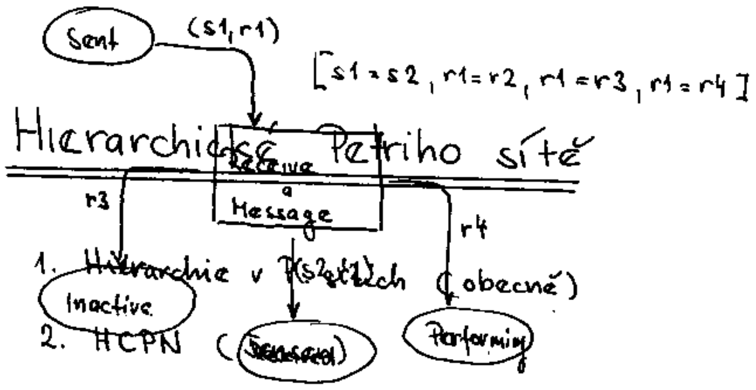
$Out: X \to X_s$ – <u>výstupní uzly</u>

$$Out(x) = \{x' \in X \mid \exists a \in A : N(a) = (x, x')\}$$

$X: X \to X_s$ – <u>okolní uzly</u>

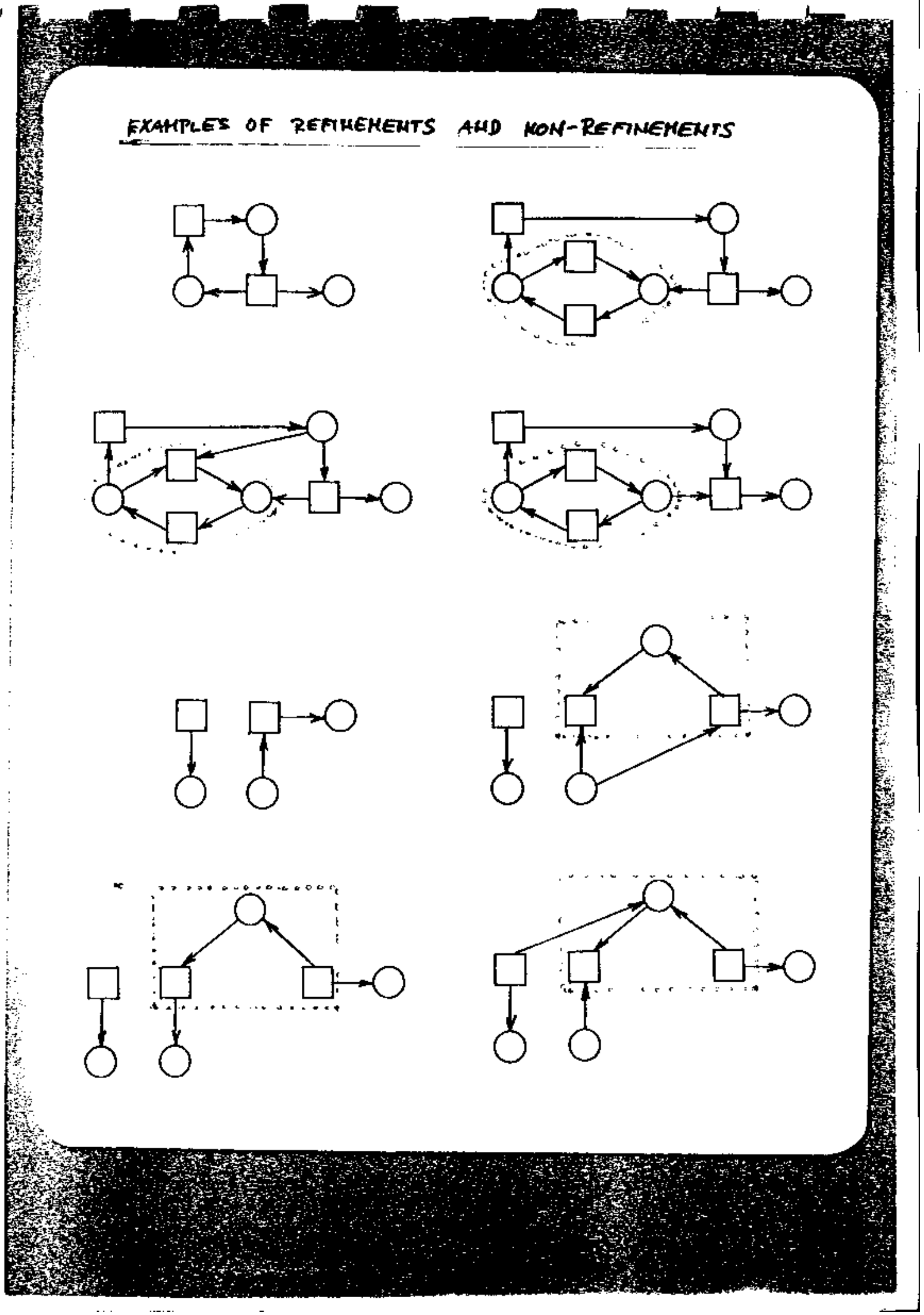
$$X(x) = \{x' \in X \mid \exists a \in A : (N(a) = (x, x') \vee N(a) = (x', x))\}$$

Hierarchické Petriho sítě

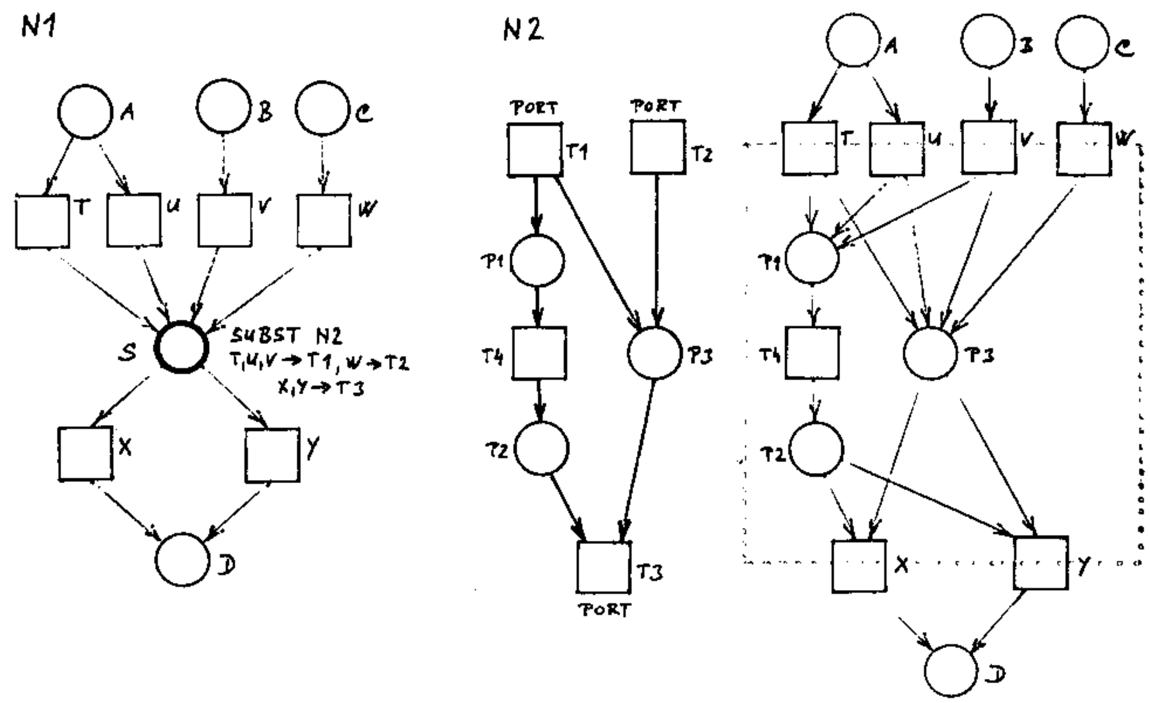


1. Hierarchie v P. sítích (obecné)
2. HCPN ([illegible])

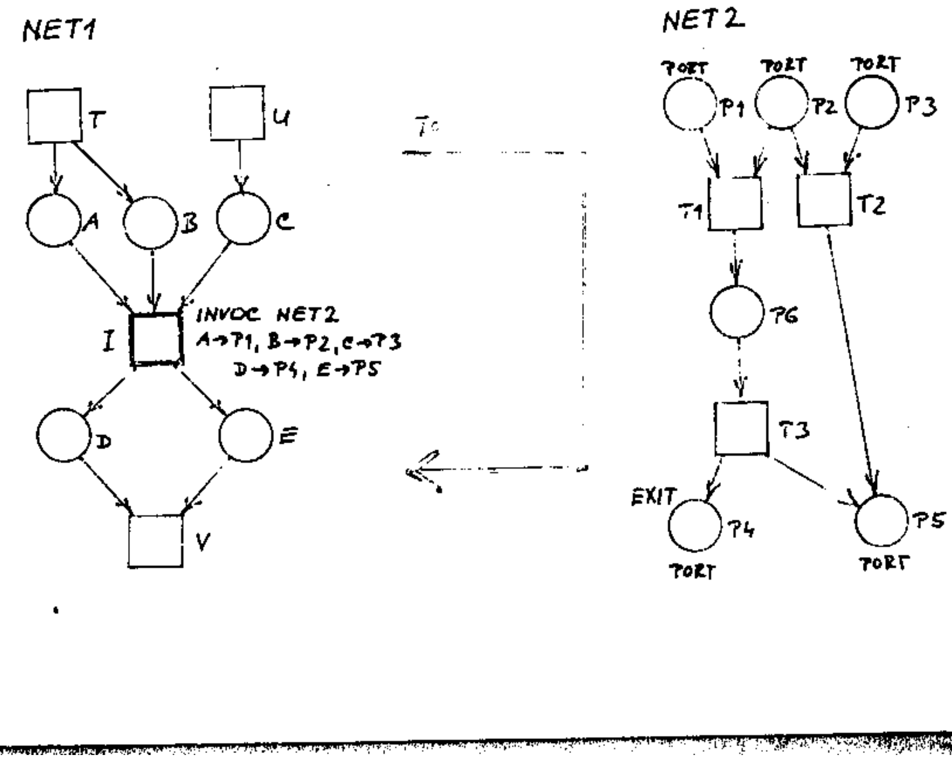
Alternativní model využívající str. podmínku

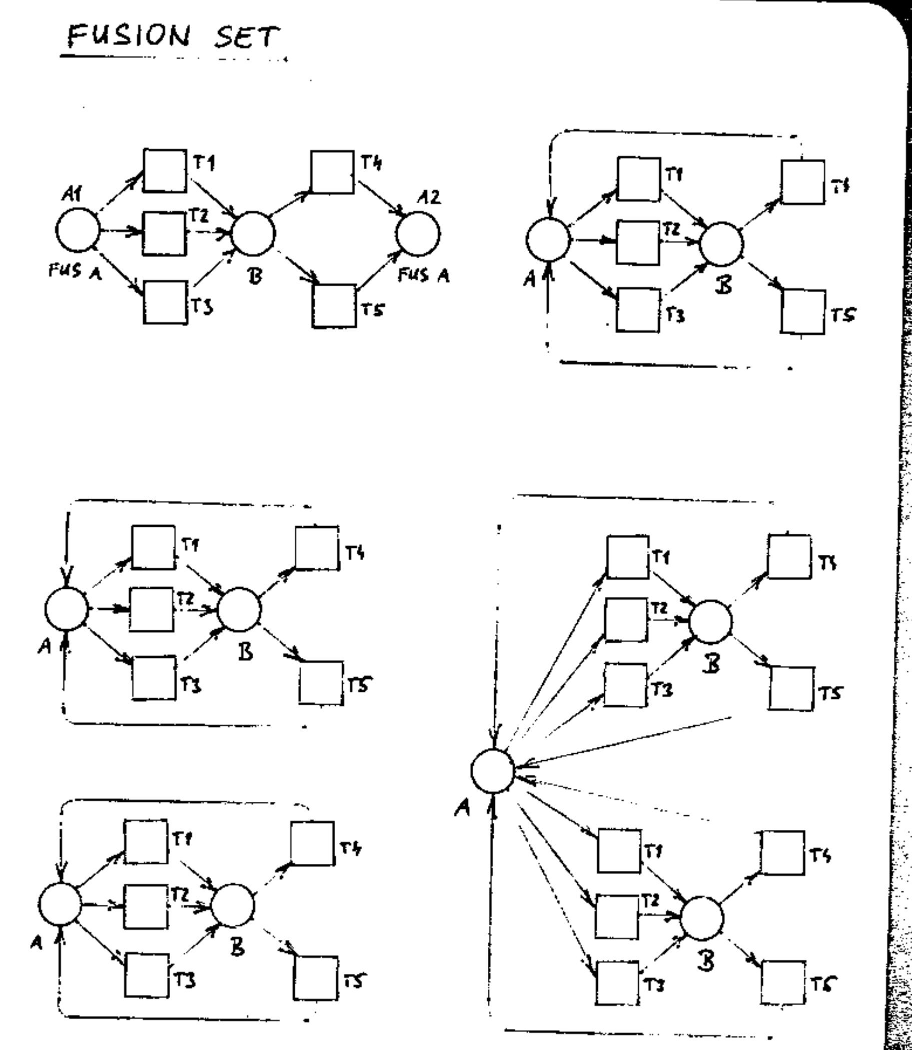


SUBSTITUTION PLACE



INVOCATION TRANSITION





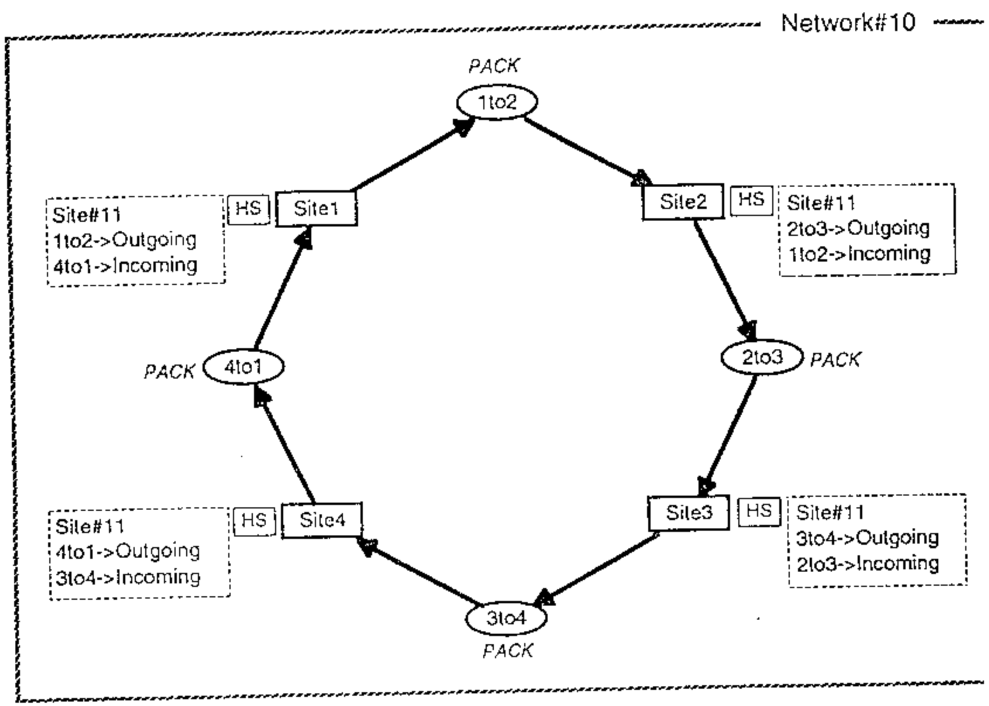


Fig. 3.1. *NetWork#10* describes a ring network with four different sites

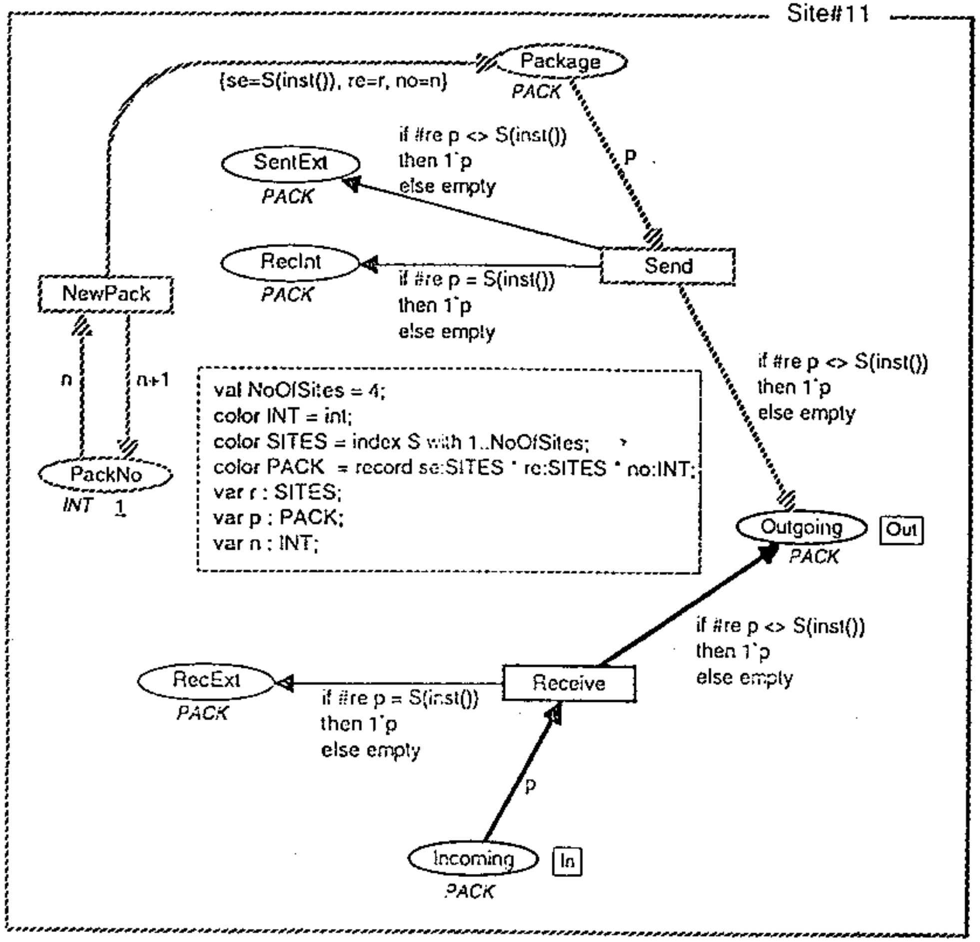


Fig. 3.2. *Site#11* describes an individual site of the ring network

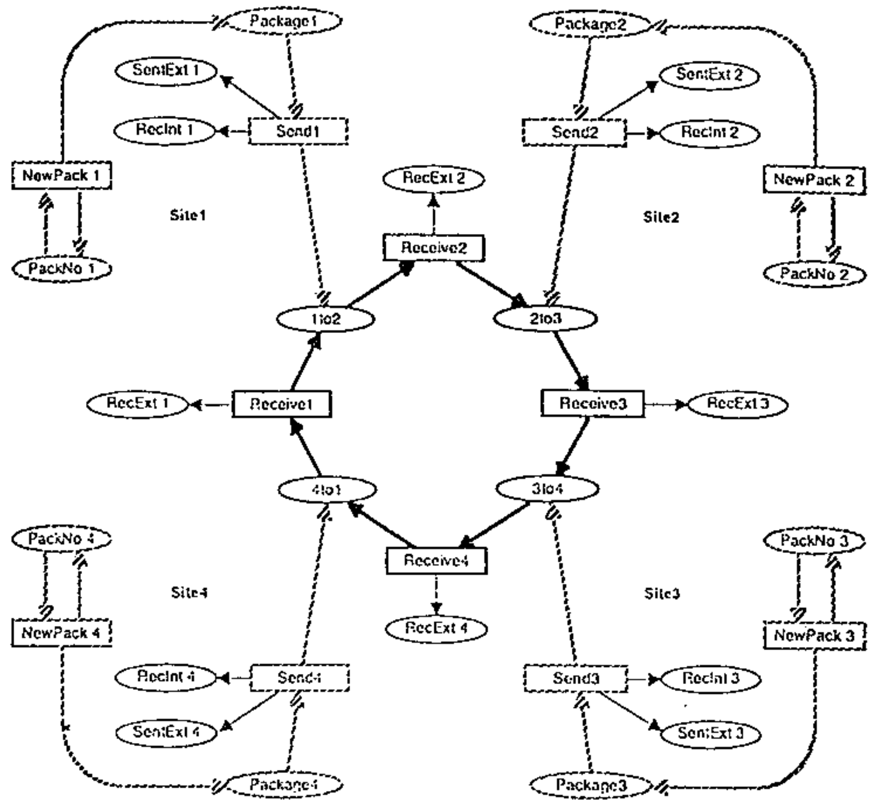


Fig. 3.3. Non-hierarchical CP-net with the same behaviour as the hierarchical CP-net that contains the pages *NetWork#10* and *Site#11*

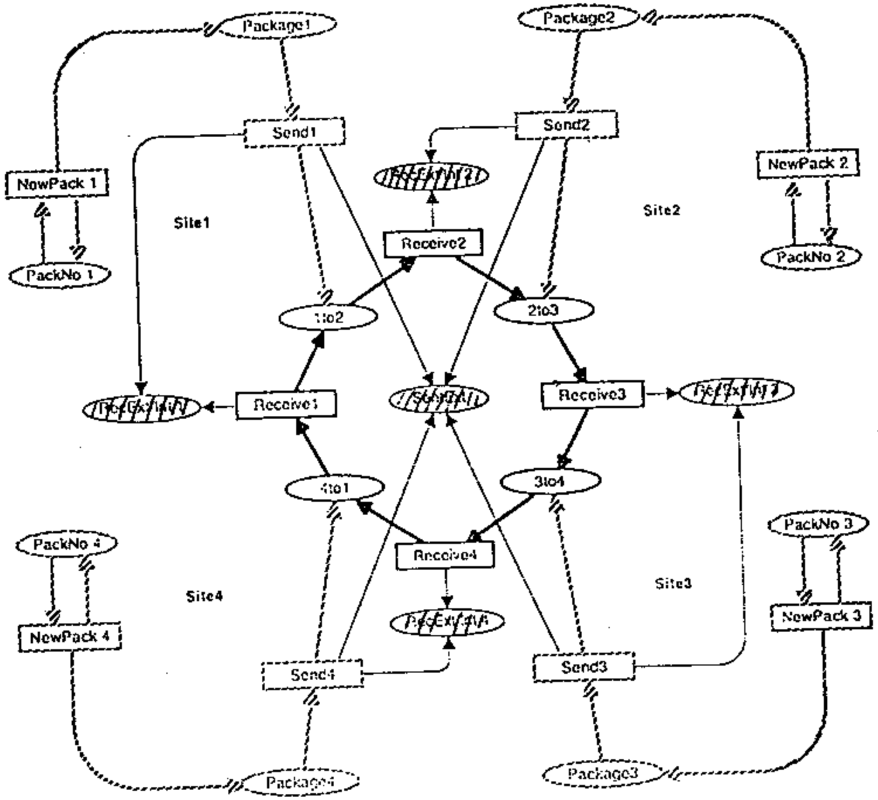


Fig. 3.5. Non-hierarchical equivalent of a hierarchical CP-net with two fusion sets

- instance fusion sets
- page fusion sets